

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, daß ich die von mir am heutigen Tage der Diplomkommission der Fachrichtung Geowissenschaften eingereichte Diplomarbeit zum Thema "*Vergleichende Untersuchungen zur Linien-glättung mit Snakes und Wavelets*" vollkommen selbständig und nur unter Benutzung der in der Arbeit angegebenen Quellen angefertigt habe.

Dresden, den

Unterschrift:

VERGLEICHENDE UNTERSUCHUNGEN ZUR
LINIENGLÄTTUNG MIT
SNAKES UND WAVELETS

Diplomarbeit
bei Prof. Dr. Ing. habil. S. Meier

vorgelegt von Stefan Steiniger
am Fachbereich Geodäsie der
Technischen Universität Dresden

Dresden, 10. April 2003

Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis der Abbildungen	1
Verzeichnis der Tabellen	3
1 Einleitung	4
2 Beschreibung der Testdaten	6
2.1 Datentyp und Anforderungen	6
2.2 Linienrepräsentation	7
2.3 Beispieldatensätze	8
3 Glättung durch Wavelet-Transformation	11
3.1 Die Wavelet-Transformation	11
3.1.1 Grundlagen	12
3.1.2 Die Multiskalenanalyse	14
3.1.3 Schnelle und Stationäre Wavelet-Transformation	16
3.1.4 Approximationseigenschaften des Haar-Wavelets	18
3.2 Glättung mit Wavelets	22
3.2.1 Glättungsfilter im Wavelet-Bereich	22
3.2.2 Bestimmung der Durchlaßcharakteristik der Skalensperre für das Haar-Wavelet	23
3.2.3 Effekte bei der Realisierung der Glättung mit Wavelets	26
3.3 Ableitbare Kenngrößen aus der mit Wavelets geglätteten Linie	29
3.3.1 Die Linienlänge	29
3.3.2 Die Skalenenergie	30
3.3.3 Varianz der Richtungswinkel und der Krümmung	31
3.4 Untersuchungen zur Glättung der Tangentenwinkelfunktion (TWF) mit Wavelets	35
3.4.1 Korrektur der gefilterten TWF	35
3.4.2 Rekonstruktion der geglätteten Linie aus der TFW	36
4 Energieminimierende Verfahren zur Glättung	41
4.1 Grundprinzip	41
4.2 Energieminimierende Splines (Snakes)	43
4.3 Tangent-Angle-Function-Snakes (Tafus)	45
4.4 Glättung mit Snakes	49

4.4.1	Ansatz der externen Energie	49
4.4.2	Snakes - Implementierung, Defekte und Verbesserungen	49
4.5	Glättung mit Tafus	56
4.5.1	Ansatz der externen Energie	56
4.5.2	Durchlaßcharakteristik und Steuerparameter α und β	56
4.5.3	Tafus - Implementierung, Defekte und Verbesserungen	59
5	Steuerung und Optimierung der Glättungsverfahren	63
5.1	Steuerung der Glättung	63
5.1.1	Die Parameter α und β	63
5.1.2	Iterative Glättung mit Snakes und Tafus	64
5.1.3	Abbruchgrößen der Iteration	65
5.2	Verbesserung durch variable Koeffizientenmatrizen	67
5.2.1	Tafus mit variabler Koeffizientenmatrix	67
5.2.2	Snakes mit variabler Koeffizientenmatrix	69
5.3	Löschen von Punkten	73
5.4	Erhaltung charakteristischer Kurvenpunkte durch Segmentierung	74
5.5	Vergleich der Glättungsverfahren	75
6	Verdrängung und Glättung mit Snakes und Tafus	78
6.1	Die Verdrängung mit Snakes und Tafus	79
6.1.1	Prinzip der Energieminimierung bei der Verdrängung	79
6.1.2	Das Snakes- und das Tafus-Modell für die Verdrängung	80
6.1.3	Ansatz der äußeren Energie	83
6.1.4	Restriktionen	86
6.2	Verdrängung und Glättung für Snakes und Tafus	88
6.2.1	Restriktionen der Kombinationsmodelle	88
6.2.2	Wechselseitiger Lösungsalgorithmus	89
6.2.3	Integrierter Lösungsalgorithmus	90
6.3	Implementation und Vergleich der Verfahren	91
6.3.1	Testdaten	91
6.3.2	Realisierung und Modifikationen der Algorithmen	92
6.3.3	Untersuchungsergebnisse der Kombinationsverfahren	97
7	Zusammenfassung und offene Probleme	100
	Literaturverzeichnis	104
A	Durchlaßcharakteristik der Wavelet-Transformation	107
B	Beispiele zum Vergleich der Glättungsverfahren	108
C	Beispiele zum Vergleich der Kombinationsverfahren	111

Abbildungsverzeichnis

1.1	Anwendung der Linienglättung bei der Ableitung kleinerer Maßstäbe	5
2.1	Begleitendes Zweibein und Tangentenwinkel	7
2.2	Tangentenwinkelfunktion einer Linie	8
2.3	Testlinien für die Glättungsverfahren	9
2.4	Instationäre Testlinie für die Glättungsverfahren	10
3.1	Beispiele für Wavelet-Funktionen	13
3.2	Dilatiertes und translatiertes Wavelet	14
3.3	Multiskalenanalyse eines Signals	15
3.4	Schema der Multiskalenanalyse	16
3.5	Schnelle Wavelet-Transformation mit dem Haar-Wavelet	17
3.6	Stationäre Wavelet-Transformation mit dem Haar-Wavelet	18
3.7	Das Haar-Wavelet	19
3.8	Amplituden- und Phasenkorrektur der Wavelet-Koeffizienten zum Erhalt der 1. Ableitung einer Sinusfunktion	21
3.9	Glättung mittels Threshold	22
3.10	Schema zur Frequenzbestimmung einer Skala der Wavelet-Transformation	24
3.11	Ermittlung der Durchlaßcharakteristik der Skalensperre im Wavelet-Bereich	25
3.12	Stationäre Wavelet-Transformation eines Signals	27
3.13	Cycling-Effekt der Wavelet-Transformation zum Haar-Wavelet	28
3.14	Skalenenergie für verschiedene Skalenfilterstufen	30
3.15	Berechnete Krümmungsvarianzen aus der Glättung mit Wavelets	32
3.16	Approximation der Krümmung aus den Wavelet-Koeffizienten verschiedener Skalen	34
3.17	Filterkoeffizienten der Wavelet-Transformation im Ortsbereich	35
3.18	Korrektur der Signalrandwerte nach Filterung im Wavelet-Bereich	36
3.19	Direkte Rekonstruktion der Linie aus der geglätteten TWF	37
3.20	Rekonstruktion einer Linie mit häufigen Richtungswechseln	38
3.21	Zwei Beispiele zur Glättung mit Wavelets	38
3.22	Rekonstruktion der Linie aus der geglätteten TWF durch iteratives Verschieben von Punkten	39
4.1	Ausgleichende Snake-Funktion	42
4.2	Neupunktberechnung für Tafus	48

4.3	Snakes-Durchlaßcharakteristik	50
4.4	Lösungen schlecht konditionierter Matrizen	52
4.5	Maßstabstreue Filterung	53
4.6	Zeilenweise maßstabstreue Filterung	54
4.7	Maßstabskorrektur der Randkoeffizienten	55
4.8	Erhaltung der Anfangs- und Endpunkte von Linien durch Spiegelung	55
4.9	Tafus-Defekte für den Ansatz mit konstanter Energie	59
4.10	Restriktionen für die Tafus-Glättung	61
5.1	Snakes-Glättung mit unterschiedlicher Parameterwahl	64
5.2	Welleneffekt für Tafus mit $\beta \leq 0.5$	65
5.3	Vergleich der Krümmungsenergie und der Skalenenergie	66
5.4	Tafus-Glättung mit variabler und konstanter Koeffizientenmatrix	70
5.5	Variation des Parameters β bei den Snakes	72
5.6	Snakes-Glättung mit variabler Koeffizientenmatrix	73
5.7	Löschen von Punkten an Problemstellen für Tafus	74
5.8	Glättung mit Segmentierung der Linie	75
6.1	Überlagerung einer Linie nach iterativer Glättung	78
6.2	Schema zur Linienverdrängung mittels Energieminimierung	80
6.3	Berechnung der externen Energie bei der Verdrängung	83
6.4	Berechnung der externen Energie bei der Verdrängung mit Snakes	85
6.5	Berechnung der externen Energie bei der Verdrängung mit Tafus	85
6.6	Beispieldaten für Verdrängung und Glättung	92
6.7	Energieverlauf bei der Snakes-Verdrängung	94
6.8	Überlagerung von Linien durch Glättung	95
6.9	Gewichtung der Glättung durch die Verdrängung	95
6.10	Zu glättendes Signal im integrierten Snakes-Modell.	96
B.1	Vergleich der Glättungsverfahren am Beispiel "Louisiana's Gulf Coast"	109
B.2	Vergleich der Glättungsverfahren am Beispiel "Untere Nette"	110
C.1	Beispiel 1 zur Kombination von Verdrängung und Glättung	112
C.2	Beispiel 2 zur Kombination von Verdrängung und Glättung	113

Tabellenverzeichnis

3.1	Vergleich ermittelter Skalenfrequenzen für das Haar Wavelet	24
6.1	Restriktionen für das Snakes-Modell	88
6.2	Restriktionen für das Tafus-Modell	89
6.3	Gleichungssysteme für den wechselseitigen Lösungsalgorithmus	89

1 Einleitung

Die gebräuchlichste Visualisierung georäumlicher Sachverhalte erfolgt durch topographische und thematische Karten. Sie sind Grundlage für die städte- und naturräumliche Planung, unterstützen die Vermittlung von geographischem Wissen und spielen ebenso im Tourismus eine bedeutende Rolle. Insbesondere haben topographische Karten die Aufgabe, die Realität möglichst exakt und umfassend darzustellen, um die oben genannten Funktionen zu erfüllen. Ein wichtiger Aspekt ist dabei der Widerspruch zwischen der Menge des darzustellenden Inhalts und dem Bestreben, diesen Inhalt so zu strukturieren und zu visualisieren, daß der Betrachter die Sachverhalte schnell erfaßt.

Die Suche eines Mittelweges zwischen diesen beiden konträren kartographischen Zielstellungen wird als *Generalisierung* bezeichnet (vgl. [Bollmann und Koch, 2002]). Die Generalisierung ist sowohl bei der kartographischen Abbildung der Realität, als auch bei der Ableitung von Karten kleiner und mittlerer Maßstäbe aus Karten großer Maßstabsbereiche unumgänglich. Die Übertragung aller Informationen von der Realität in das kartographische Abbild, bzw. von der großmaßstäbigen in die kleinmaßstäbige Karte, ist einerseits nicht erwünscht und ist andererseits aufgrund der geometrischen Mindestdarstellungsgröße von Kartenobjekten nicht möglich. Die Einhaltung der Mindestdarstellungsgröße ist erforderlich, um die Lesbarkeit der Karte zu gewährleisten.

Die Generalisierung muß demzufolge Auswahlprozesse (1) und Vergrößerungsprozesse (2) enthalten. Zudem ist die Vereinfachung der Objektform (3) für eine bessere Interpretier- und Lesbarkeit wichtig, wobei charakteristische Merkmale, die der schnellen Erkennung zweckdienlich sind, hervorgehoben werden sollen (4). Weitere Methoden sind das Zusammenfassen (5) und das Typifizieren von Objekten (6), dem eine Umwandlung in zugehörige autoplausible Kartensignaturen (7) folgen kann. Die Prozesse (2), (3) und (7) können aufgrund der erforderlichen Mindestdarstellungsdimensionen graphische Konflikte hervorrufen, welche durch Verdrängen (8) zu lösen sind.

Die Methoden der Generalisierung gelten sowohl für analoge als auch digitale Karten. Wurde der Generalisierungsprozeß früher von erfahrenen Kartographen vollzogen, so ist man heute bestrebt, die Generalisierung in der digitalen Kartographie zu automatisieren. Im Kontext der Entwicklung automatischer Generalisierungsalgorithmen ist die Aufgabenstellung dieser Arbeit zu sehen. Speziell sollen Lösungen zur Formvereinfachung (Prozeß 3) von linienhaften Objekten wie Flüssen oder Straßen untersucht werden (vgl. Abbildung 1.1). Die dabei zu betrachtenden Methoden sind zum einen die *Glättung mit Wavelets* und zum anderen die Nutzung *energieminimierender Verfahren*. Unter den energieminimierenden Verfahren werden hier zwei Arten von aktiven Splines verstanden, die als *Snakes* und *Tangent-Angle-Function-Snakes (Tafus)* bezeichnet werden.

1 EINLEITUNG

Durch geeignete Modifikation der beiden Spline-Verfahren können charakteristische Objektmerkmale (Prozeß 4) erhalten werden. Das bedeutet, daß starke Windungen und Knicke von Linienobjekten, die als wichtige Bestandteile der Objektidentifikation betrachtet werden, bestehen bleiben.

Die Glättung als Prozeß der Generalisierung darf nicht allein für sich betrachtet werden. Bei der Verkleinerung von digitalen Karten entstehen Verdrängungskonflikte. Bei gleichbleibenden Signaturgrößen für die Objekte steht weniger Darstellungsraum zur Verfügung, da mehr Objekte auf derselben Fläche abzubilden sind. Betrachtet man Linienobjekte, dann können durch die Glättung bestehende Konfliktsituationen aufgelöst aber gleichzeitig auch neue Konflikte geschaffen werden. Die Konfliktbeseitigung resultiert aus der detailärmeren Darstellung einer Linie, während neue Verdrängungssituationen durch die Überlagerung benachbarter, geglätteter Linien oder durch den Erhalt charakteristischer Kurvenpunkte entstehen. Es sollen deshalb Untersuchungen zur Glättung unter gleichzeitiger Lösung von Verdrängungssituationen ein weiterer Bestandteil der Arbeit sein. Da der Ansatz der Energieminimierung universell anwendbar ist, können zur Problemlösung ebenfalls Snakes und Tafus genutzt werden

Die Zielstellung der Diplomarbeit gliedert sich in mehrere Teile. Als wichtigste behandelte Themen lassen sich die vergleichende Abschätzung von Glättungsparametern für Tafus und Wavelet-Filterung sowie die Gegenüberstellung der Linienglättung zwischen Snakes und Tafus nennen. Es sind damit insgesamt drei Glättungsverfahren zu betrachten und zu vergleichen. Die Untersuchungen zur Glättung mit Wavelets bleiben hierbei auf die Filterung der Tangentenwinkelfunktion beschränkt, so daß die Glättung der rechtwinkligen Koordinaten vernachlässigt wird.

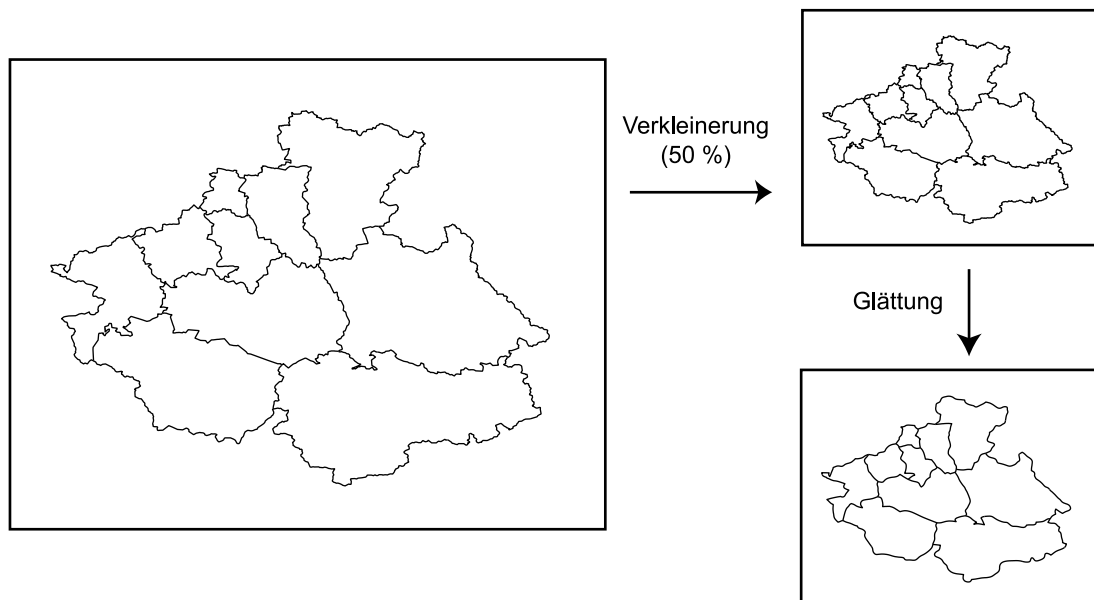


Abbildung 1.1: Anwendung der Linienglättung bei der Ableitung kleinerer Maßstäbe.
Die Glättung im rechten unteren Bild wurde mit Snakes durchgeführt.
(Daten: Dr. N. Prechtel, TU Dresden)

2 Beschreibung der Testdaten

Die in der Arbeit verwendeten Modelle der Filterung basieren auf gewissen Eigenschaften von Daten, unter deren Voraussetzung es erst möglich ist, die gewünschten Resultate zu prognostizieren. Im folgenden werden die Testdatensätze vorgestellt und Restriktionen in der mathematischen Beschreibung und den stochastischen Eigenschaften genannt.

2.1 Datentyp und Anforderungen

Ausgangsbasis für die Arbeit sollen zweidimensionale Linien sein, die in Vektorform gegeben sind. Der Linienvektor soll das diskretisierte Abbild einer stetigen natürlichen Linie darstellen. Die natürliche Linie ist insofern durch ihre approximative Beschreibung als Polygonzug schon einer ersten Generalisierung und Vereinfachung unterzogen worden.

Eine Kurve¹ in der Karte kann nach [Meier, 1971] und [Gottschalk, 1971] als Realisierung eines Zufallsprozesses betrachtet werden. Für die Annahme eines stochastischen Modells auf Linien lassen sich deren statistische Eigenschaften ermitteln und es können die Methoden der Signalverarbeitung angewandt werden. Erst durch die Grundlage dieser Theorie läßt sich das Abtasttheorem und die Filterung bzw. Glättung von Linien - mit den hier verwendeten Verfahren - in der rechnergestützten Kartographie begründen.

Damit aber die Kurve überhaupt als Realisierung eines Zufallsprozesses angesehen werden kann, muß diese spezielle Anforderungen erfüllen, die u.a. in [Meier und Keller, 1990] aufgeführt sind:

- Die Linie bzw. das Signal ist auf den betrachteten Abschnitten *stetig* und *differenzierbar*. Es wird demnach eine stückweise Differenzierbarkeit ("Glattheit") vorausgesetzt.
- Das Signal muß *stationär* sein. Stationarität bedeutet, daß die ersten beiden Momente, also Mittelwert und Varianz, für beliebige Stichproben konstante Größen sind.
- Schließlich wird vorausgesetzt, daß das Signal *ergodisches* Verhalten aufweist. Ergodizität beschreibt die Eigenschaft eines Signals - als *eine* vorliegende Realisierung - bereits alle Informationen über den Zufallsprozeß zu enthalten.

Für die Diskretisierung der Kurve ergibt sich weiterhin die Forderung, daß beim Prozeß der Diskretisierung kein Informationsverlust entsteht. Dies soll mit der Einhaltung des Abtasttheorems gewährleistet

¹Die Bezeichnung der Linie als *Kurve* scheint im mathematischen Kontext besser geeignet.

werden:

$$\Delta t \leq \frac{\pi}{\omega_g}. \quad (2.1)$$

Dabei gibt ω_g die maximal zu erhaltende Kreisfrequenz der in den Frequenzbereich transformierten Linie an und Δt die Tastweite.

Die Ergodizität ist eine sogenannte Arbeitshypothese und muß vorausgesetzt werden, wenn nur eine Realisierung (digitalisierte Linie) des Zufallsprozesses vorliegt. Stationarität und Differenzierbarkeit einer Linie sind hingegen zu prüfen und gegebenenfalls herzustellen.

2.2 Linienrepräsentation

Die Speicherung einer digitalisierten ebenen Kurve ist in der Parameterdarstellung üblich:

$$v(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Als Parameter t gebräuchlich ist der Punktindex oder die Bogenlänge. Für das Glättungsverfahren mit Tafus muß von dieser Darstellung auf die Beschreibung mittels Tangentenwinkelfunktion (TFW) übergegangen werden. Der Tangentenwinkel $\varphi(s)$ stellt eine der beiden Komponenten des begleitenden Zweibeins einer ebenen Kurve dar und ist der Winkel zwischen der Tangente im Kurvenpunkt und der x-Achse (vgl. Abbildung 2.1).

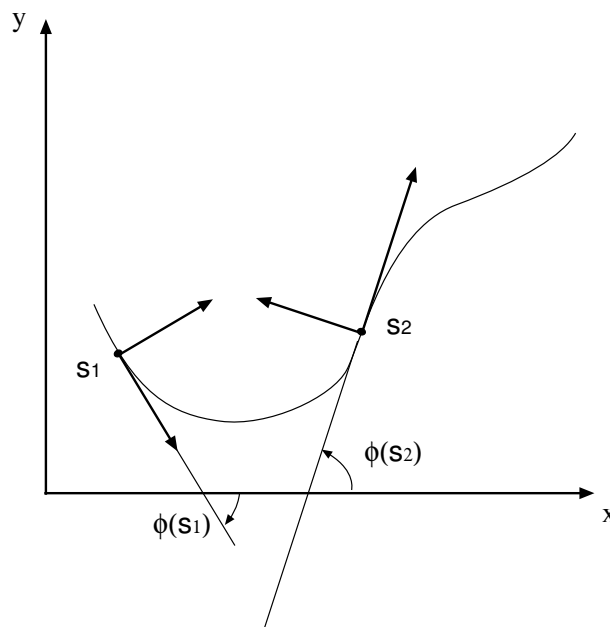


Abbildung 2.1: Begleitendes Zweibein und Tangentenwinkel $\varphi(s_i)$.

Die Berechnung des Tangentenwinkels in Abhängigkeit von der Bogenlänge s erfolgt mit:

$$\varphi(s) := \arctan \frac{\dot{y}(s)}{\dot{x}(s)}. \quad (2.3)$$

2 BESCHREIBUNG DER TESTDATEN

Die Gleichungen zur Rücktransformation in die Parameterform lauten:

$$\begin{aligned}x(s) &= x(s_0) + \int_0^s \cos \varphi(t) dt, \\y(s) &= y(s_0) + \int_0^s \sin \varphi(t) dt.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Für ein konstantes Bogenstück Δs ist neben der Länge des Bogenstückes und den Anfangskoordinaten $x(s_0)$ und $y(s_0)$ nur der Vektor der Tangentenwinkel zur Beschreibung der Kurve notwendig.

Die Einführung eines äquidistanten Punktabstandes Δs bietet noch weitere Vorteile: So vereinfachen sich einige diskrete Rechnungen und die Herleitung der externen Energie bei den Tafus. Desweiteren werden nach [Borkowski und Meier, 2001] Instabilitäten durch variable Punktabstände bei der Lösung des Tafus-Algorithmus vermieden.

Eine geforderte Signaleigenschaft ist die Stetigkeit (vgl. 2.1). Für die TWF ist diese nicht unbedingt gewährleistet, da der Wertebereich der Winkelfunktionen periodisch definiert ist. Somit können Sprungstellen auftreten, welche unbedingt zu beseitigen sind, da eine Signalglättung zu großen Winkeländerungen führt. Diese würden bei der Rückrechnung mit Formel (2.4) die Linie zerstören. Die Berechnung des Tangentenwinkels muß daher in Relation zum vorhergehenden Winkel erfolgen. Die Abbildung 2.2 zeigt eine solchermaßen berechnete TWF.

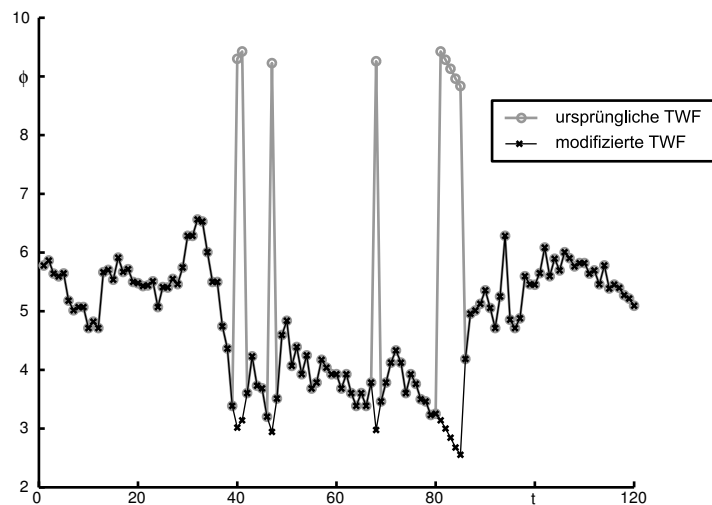


Abbildung 2.2: Tangentenwinkelfunktion einer Linie.

2.3 Beispieldatensätze

Für die Untersuchungen herangezogen wurden natürliche Objekte wie Flußläufe und Küstenlinien. Nach der Digitalisierung lagen die Linien als Folge von Stützpunkten P_i in kartesischen Koordinaten (x_i, y_i) vor. Die Punktabstände sind nicht äquidistant digitalisiert worden. Die Herstellung der im vorigen Abschnitt beschriebenen Eigenschaften erfolgte ohne Rückgriff auf Interpolationsalgorithmen. Es wurde

2 BESCHREIBUNG DER TESTDATEN

stattdessen die TWF der jeweiligen Linie berechnet und anschließend mit *konstanter* Bogenlänge zurücktransformiert. Dadurch entstanden zwar künstliche Kurven, aber die Eigenschaften der TWF entsprechen immer noch denen realer Linien.

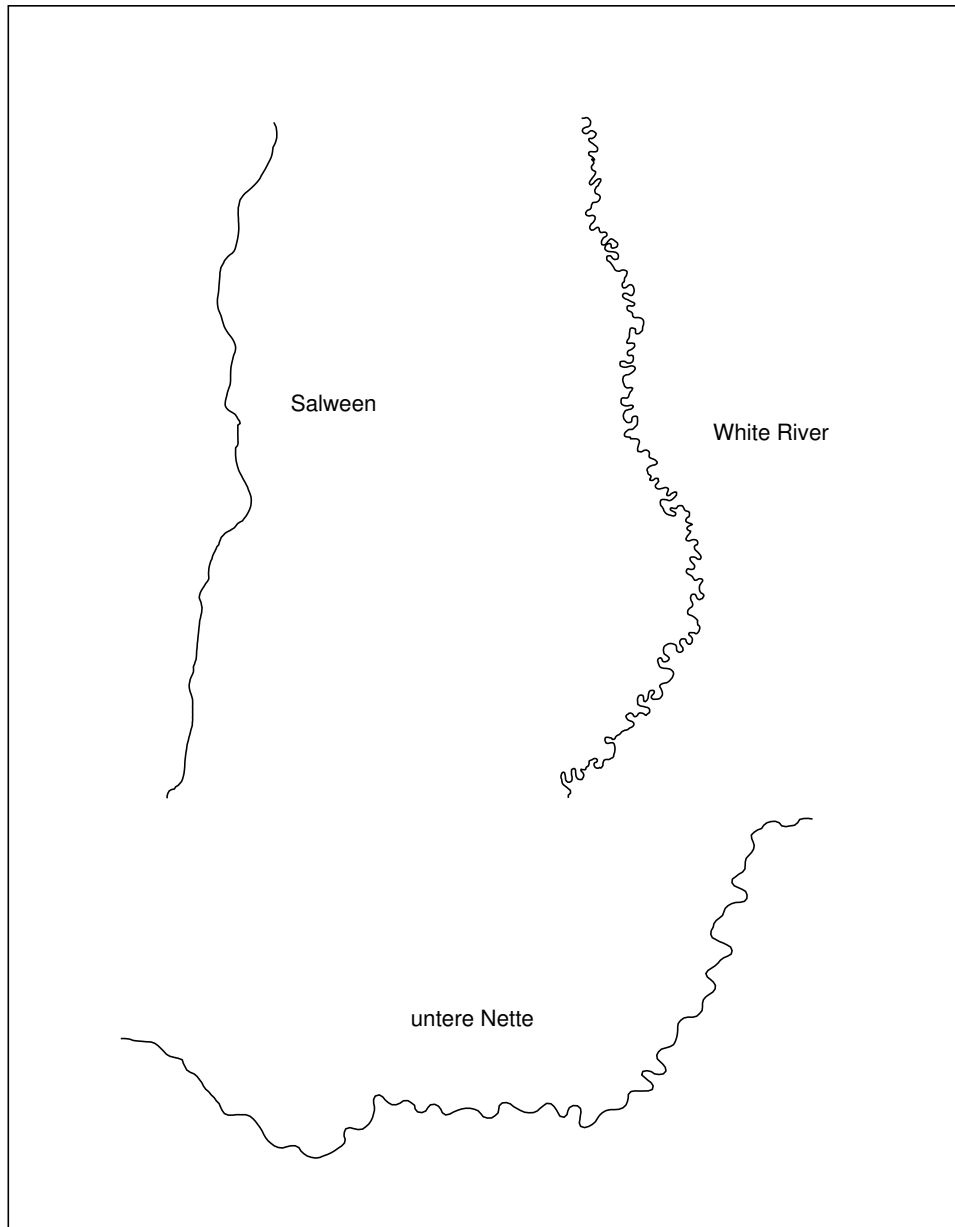


Abbildung 2.3: Nahezu stationäre Testlinien in Bezug auf die Tangentenwinkelfunktion und die Krümmung.

Die in Abbildung 2.3 dargestellten Linien "White River", "Salween" und "Untere Nette" sind bezüglich ihrer Kurvigkeit (Krümmung) als stationäre Prozesse zu sehen. Dies trifft nicht für das Beispiel "Louisiana's Gulf Coast" zu (Abb.2.4). Diese Linie ist instationär und besitzt Unstetigkeitsstellen (Knicke), welche bei einer Generalisierung beizubehalten sind. Eine dieser Problemstellen ist eine natürliche, doppelte Knickstelle, die als Digitalisierfehler interpretiert werden könnte. Entsteht eine solche Stelle durch Fehler bei der Digitalisierung, dann ist sie zu glätten. Hingegen ist sie im anderen - natürlichen - Fall zu

2 BESCHREIBUNG DER TESTDATEN

erhalten. Nach den Forderungen aus Abschnitt 2.1 ist die Linie als Testobjekt auszuschließen. Sie soll allerdings bei den Untersuchungen verwendet werden, um die Robustheit der Glättungsverfahren nachzuweisen.

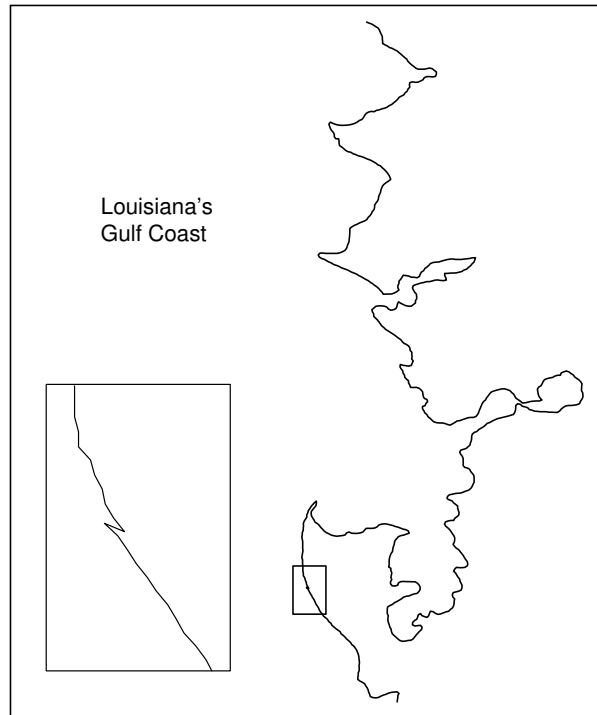


Abbildung 2.4: Instationäre Testlinie für die Glättungsverfahren.

Die Linie weist Knickstellen und Problemstellen auf, wie sie durch Digitalisierfehler entstehen (siehe Box).

3 Glättung durch Wavelet-Transformation

Da sich die Glättung mit Wavelets von den beiden anderen Verfahren stark unterscheidet und am Ende der Arbeit auf die Kombination von Snakes-Verdrängung und Snakes-Glättung eingegangen wird, soll die Wavelet-Transformation als erstes Glättungsverfahren vorgestellt werden. Im ersten Abschnitt werden die Grundlagen der Wavelet-Transformation und die Multiskalenanalyse behandelt. Letztere stellt das Grundprinzip für die numerische Realisierung der Wavelet-Transformation dar. In den weiteren Abschnitten wird auf die Glättungsfiler im Wavelet-Bereich und das Haar-Wavelet eingegangen.

Um einen Vergleich mit Snakes und Tafus vornehmen und deren Steuerparameter abschätzen zu können, werden anschließend Kenngrößen der Wavelet-Glättung genannt und eine Linienglättung mit Wavelets durchgeführt.

3.1 Die Wavelet-Transformation

Transformationen von Signalen werden vorgenommen, um Signaleigenschaften besser sichtbar zu machen und damit deren Analyse zu vereinfachen. Es wird mathematisch gesehen eine Funktion durch eine andere Basis dargestellt. Die Transformation beschreibt dabei den Übergang von einer Basis zur anderen. Eine spezielle Transformation ist die *Wavelet-Transformation*, welche auf Wavelets (dt.: Wellchen) als Basisfunktionen aufbaut. Sie ist eine Integraltransformation und mit der Fourier-Transformation vergleichbar. Die Eigenschaft der *Lokalisierbarkeit*¹, die bei der Fourier-Transformation durch die Nutzung von “unendlichen“ Sinus- bzw. Kosinusschwingungen als Grundfunktionen fehlt, wird durch Nutzung von kleinen Wellen als räumlich begrenzte Basisfunktionen eingeführt. Das Ziel einer ortsabhängigen Frequenzdarstellung des Signals mittels Wavelet-Transformation wird durch das Grundprinzip der

- stückweisen Verschiebung des Wavelets
- kombiniert mit einer Dehnung/Stauchung des Wavelets und
- anschließender Ermittlung eines “Korrelationswertes“ zwischen Signal und Wavelet erreicht.

Die folgenden Ausführungen zur Wavelet-Transformation sollen nur das Basiswissen zum Verständnis der Arbeit vermitteln. Ausführliche Beschreibungen der Transformation, vor allem mathematischer Art, sind in einschlägiger Standardliteratur wie [Louis et al., 1998], [Blatter, 1998] oder [Bäni, 2002] zu finden.

¹*Lokalisierbarkeit* heißt, daß feststellbar ist, ob ein Signal eine bestimmte Frequenz enthält und wo diese auftritt.

3.1.1 Grundlagen

Bei der Wavelet-Transformation wird ein Signal f mit Hilfe des Wavelets ψ untersucht. Zu diesem Zweck wird ψ mit dem Parameter b translatiert und mit dem Parameter a dilatiert. Das Skalarprodukt aus ψ und f , der Wavelet-Koeffizient L_ψ , berechnet sich wie folgt:

$$L_\psi f(a, b) = \frac{1}{\sqrt{c_\psi |a|}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (3.1)$$

Diese Formel drückt aus, daß ein beliebiges Signal mit einem bestimmten Wavelet “zerlegt“ wird und die Koeffizienten L_ψ die Ähnlichkeit zwischen Meßsignal und Wavelet als Analysesignal beschreiben. Je größer die Werte von L_ψ sind, desto besser stimmen beide Signale überein. Als Basisfunktion ψ ist nicht jede Funktion geeignet. Sie muß zumindest die folgende Bedingung erfüllen:

$$0 < c_\psi := 2\pi \int_{\mathbb{R}} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty. \quad (3.2)$$

Hierbei steht $\hat{\psi}$ für die Fourier-Transformierte des Wavelets und ω für die Kreisfrequenz. Äquivalent kann formuliert werden, daß die Energie E eines Wavelets normiert ist:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1, \quad (3.3)$$

und zusätzlich gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)| dt = 0. \quad (3.4)$$

Aus Gleichung (3.4) folgt die Bedingung einer oszillierenden Wavelet-Funktion und aus (3.3), daß diese zu beiden Seiten der Abszisse beschränkt ist. Eine Sinusfunktion erfüllt das Kriterium der Oszillation, aber nicht das der Beschränktheit.

Neben der Erfüllung der obigen Gleichungen ist es wünschenswert, wenn ein Wavelet folgende weitere Eigenschaften besitzt (vgl. [Bäni, 2002]):

- B 1. Das Wavelet ist auf eine große Klasse von Funktionen anwendbar. Sowohl Analyse (Berechnung von Wavelet-Koeffizienten w_{c_i}) als auch Synthese (Rekonstruktion des Signals aus den w_{c_i}) sind numerisch stabil und mit geringem mathematischen Aufwand möglich.
- B 2. Es ist gut im Zeitbereich lokalisiert und nur auf einem beschränkten Bereich von Null verschieden.
- B 3. Das Wavelet sollte ebenfalls eine gute Lokalisation im Frequenzbereich haben.
- B 4. Es sollte ein orthonormiertes Funktionensystem aufstellbar sein, um die Koeffizienten eindeutig zu bestimmen.

Dem ist anzumerken, daß sich Wunsch B 2 und B 3 widersprechen, da die *Heisenbergsche Unschärferelation* zutrifft (siehe auch [Louis et al., 1998, S. 31]). Nach dieser gilt: Je besser eine Funktion im Zeitbereich lokalisiert ist, desto schlechter ist ihre Verortung im Frequenzbereich.

3.1.1 GRUNDLAGEN DER WAVELET-TRANSFORMATION

Eine gute Vorstellung von diesen Basisfunktionen wird durch die Abbildung 3.1 erhalten. In ihr sind die Graphen bekannter Wavelets dargestellt, wobei auf das Haar-Wavelet später noch genauer eingegangen wird.

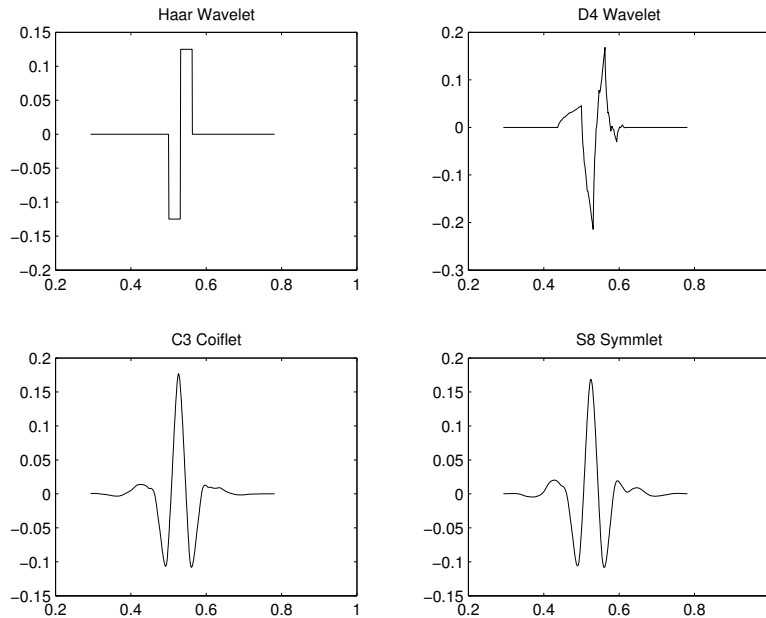


Abbildung 3.1: Beispiele für Wavelet-Funktionen. (Quelle: WaveLab Einführung)

Um die Bedeutung der Parameter a, b aus Formel (3.1) zu veranschaulichen, ist im Bild 3.2 das Wavelet ‘‘S8 Symmlet‘‘ dargestellt. Es ist in verschiedenen Größen a , die als *Skalen* bezeichnet werden, und translatiert in verschiedenen Positionen b zu sehen. Die Positionswerte sind auf $t = [0..1]$ normiert. Die kleinste Skala ($a = 1$) beschreibt die größte Zoomstufe und Detailauflösung, während große Skalen eine grobe Auflösung repräsentieren. Bei Betrachtung der Amplituden für jedes dilatierte Wavelet im Bild 3.2 ist die normierte Energie ersichtlich.

Wie in [Bethge et al., 1997] angeführt, ist die Wavelet-Transformation (3.1) vom Faltungstyp. Aus diesem Grund kann sie für ein festes a auch als linearer Filter mit einer durch das Wavelet gegebenen Gewichtsfunktion $\psi(\cdot/(-a))$ interpretiert werden. Die Rücktransformation bzw. Synthese des Signals erfolgt mit der Gleichung:

$$f(t) = \sqrt{\frac{1}{c_\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} L_\psi f(a, b) \sqrt{\frac{1}{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{da db}{a^2}. \quad (3.5)$$

Da die Wavelet-Transformation (WT), wie sie eben beschrieben wurde, nur auf stetige Funktionen anwendbar ist, muß für die praktische Anwendung mit realen Daten und Meßwerten eine Diskretisierung erfolgen. Die im Folgenden beschriebene Multiskalenanalyse bildet das Grundgerüst einer jeden numerischen Realisierung der WT.

3.1.2 DIE MULTISKALENANALYSE

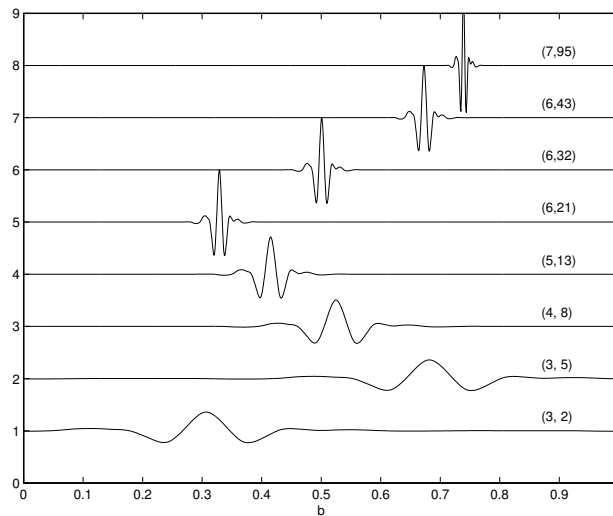


Abbildung 3.2: Dilatiertes und translatiertes Wavelet.

Das Wavelet $S8$ (Symmlet) in verschiedenen Skalen und Positionen ($a = 3 \dots 7, b = 2 \dots 95$). Die Abszisse bzw. Positionsachse wurde für jede Skala normiert. (Quelle: WaveLab Einführung)

3.1.2 Die Multiskalenanalyse

Die Einführung der Multiskalenanalyse ist auf [Mallat, 1989] und [Meyer, 1992] zurückzuführen. Sie trennt ein Signal f fortlaufend in einen Hochpaßanteil D (wie Detail) und einen Tiefpaßanteil A (wie Approximation). In der Abbildung 3.3 ist dies für ein einfaches Signal dargestellt.

Mathematisch ausgedrückt (Gleichung (3.6)) ist es die Projektion $P_1 f$ des Signals $f \in V_0$ in einen Unterraum $V_1 \subset V_0$ und die Projektion $Q_1 f$ in das mit W_1 bezeichnete orthogonale Komplement von V_1 .

$$f = P_1 f + Q_1 f \quad (3.6)$$

$$V_0 = V_1 \oplus W_1 \quad (3.7)$$

Die Projektion $P_i f$ wird dabei in die Unterräume V_{i+1} und W_{i+1} fortgeführt, indem der Tiefpaßanteil wiederum in ein Detailsignal und ein Approximationssignal zerlegt wird (siehe Abb. 3.4).

Die Projektionen $Q_i f$ enthalten die Detailsignale von f in bestimmten Frequenzbändern, die den Skalen a aus dem vorigen Abschnitt entsprechen. Der Dilatationsparameter $a \in \mathbb{Z}$ gibt somit die Bezeichnung des Unterraumes W_i an ($a = i$). Die Basisfunktionen für die Räume W_i mit den Signaldetails sind die mit a dilatierten Wavelets $\psi_{i=a}$. Daraus folgt, daß ein Wavelet einen Hochpaßfilter darstellt.

Da die Räume W_i und V_i orthogonal zueinander sind, muß die Basisfunktion $\phi_{i=a}$ des Raumes V_i (welcher die Signalapproximationen enthält) orthogonal zum jeweiligen Wavelet $\psi_{i=a}$ sein. Diese zu ψ_a komplementäre Basisfunktion wird als *Skalierungsfunktion* ϕ_a oder *Vaterfunktion* bezeichnet. Sie erfüllt die Forderung der Mittelungseigenschaft (3.8) und realisiert deshalb einen Tiefpaßfilter:

$$\phi \text{ ist integrierbar und } \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 1. \quad (3.8)$$

3.1.2 DIE MULTISKALENANALYSE

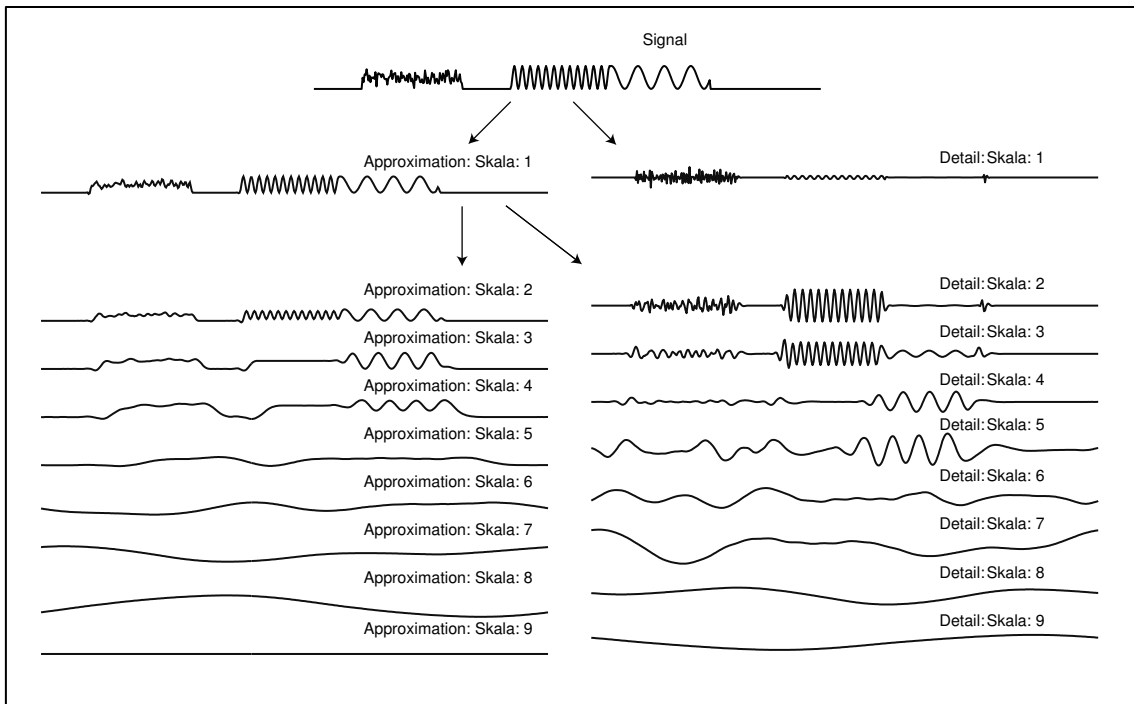


Abbildung 3.3: Multiskalenanalyse eines Signals

Die “2-Skalenrelation“ beschreibt die Verknüpfung zwischen zwei Skalen, welche unterschiedliche Approximationen der Funktion f darstellen:

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2x - k). \quad (3.9)$$

Hierbei ist k die Anzahl der Filterkoeffizienten h_k der Skalierungsfunktion $\phi(x)$ in Abhängigkeit von der Skala a .

Die Gleichung (3.9) ist von den Vaterfunktion zu erfüllen und beinhaltet, daß sich die Skalierungsfunktionen $\phi_{a,b}$ einer jeden Skala a iterativ aus den für einen Prototyp $\phi_{a,b} = \phi_{0,0}$ gegebenen Koeffizienten h_k berechnen lassen mit:

$$\phi_{a,0} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi_{a-1,k}. \quad (3.10)$$

Den (orthogonalen) Zusammenhang zwischen Wavelet und Skalierungsfunktion stellt die folgende Gleichung (3.11) dar. Sie zeigt ebenso, daß der normale Weg zur Konstruktion eines Wavelets über die Skalierungsfunktion erfolgt, wenn Wavelet und Skalierungsfunktion eine Orthonormalbasis des Funktionenraumes bilden soll.

$$\psi_{a,0} = \frac{1}{2} \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k c_{1-k} \cdot \phi_{a-1,k} \quad (3.11)$$

Eine vollständige Basis bzw. ein Filtersatz der Skala a ergibt sich durch Verschiebung des Prototyps jeder Skala um 2^a Werte, äquivalent dem Translationsparameter in (3.1).

Die genannten Gleichungen weisen darauf hin, daß das Wavelet und die Skalierungsfunktion eine Länge von 2^a , $a \in \mathbb{Z}$ Koeffizienten haben. Die Anzahl der Filterkoeffizienten von zwei Skalen a und $a - 1$ unterscheidet sich um 2^{a-1} Koeffizienten. Daraus ergibt sich für das zu filternde bzw. zu transformierende Si-

3.1.3 SCHNELLE UND STATIONÄRE WAVELET-TRANSFORMATION

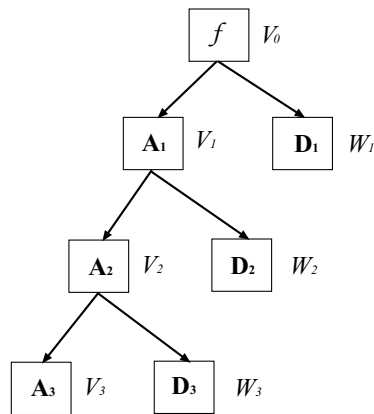


Abbildung 3.4: Schema der Multiskalenanalyse

gnal die Voraussetzung einer dyadischen² Länge. Ist diese nicht eingehalten, so wird das Eingangssignal mit verschiedenen Methoden verändert, um die Bedingung zu erfüllen. Daraus resultieren verfälschte Wavelet-Koeffizienten, die bei der Auswertung beachtet werden müssen.

3.1.3 Schnelle und Stationäre Wavelet-Transformation

Beide Wavelet-Transformationen sind auf der Multiskalenanalyse basierende numerische Realisierungen. Sie unterscheiden sich durch die Größe des Translationsparameters b voneinander.

Die Schnelle Wavelet-Transformation (FWT - Fast Wavelet Transformation) stellt die effektivste und am häufigsten genutzte Realisierung dar. Hierbei ist die Anzahl der berechneten Wavelet-Koeffizienten genauso groß wie die Anzahl der Eingangswerte. Dies scheint zunächst erstaunlich, da für einen berechneten Wert nicht nur der "Korrelationskoeffizient" mit dem Wavelet ψ für eine bestimmte Skala a , sondern auch für eine Position b angegeben wird, also zwei Informationen pro Signalwert. Demnach müßte es für ein dyadisches Signal mit 2^n Signalwerten $n \cdot 2^n$ Ergebniswerte geben. Das Problem wird dadurch gelöst, daß das Wavelet immer um seine eigene Länge verschoben wird. Dies ist für das Haar-Wavelet, welches eine Filterlänge von zwei Werten in der ersten Skala - dem Frequenzband mit hohen Frequenzen - besitzt, im Bild 3.5 anschaulich dargestellt.

Es ist erkennbar, daß nach der Filterung für die erste Skala mit dem Wavelet ψ (Hochpaßfilter H) und der Skalierungsfunktion ϕ (Tiefpaßfilter T) nur die Wavelet-Koeffizienten der Hochpaßfilterung im Ergebnissignal enthalten sind. Damit wird nur die Hälfte der ursprünglichen Werte weiterverwendet. Bei jeder neuen Filterung halbiert sich wieder die Anzahl der Werte des Eingangssignals. Dadurch besitzt der Ergebnisvektor der Wavelet-Koeffizienten genauso viele Werte wie der Eingangsvektor. Dies hat zur Folge, daß nicht nur weniger Rechenzeit im Vergleich zur Verschiebung um nur eine Stelle nötig ist, sondern auch die Redundanzfreiheit des berechneten Vektors. Das Signal ist dennoch vollständig, das heißt ohne Verlust rekonstruierbar. Weiterhin ist aus der Grafik zu erkennen, daß bei der FWT eigentlich

²Exponentielle Zahlen mit Basis 2 werden auch als dyadische Zahlen bezeichnet. Es wird deshalb im Folgenden von dyadischer Werteanzahl gesprochen.

3.1.3 SCHNELLE UND STATIONÄRE WAVELET-TRANSFORMATION

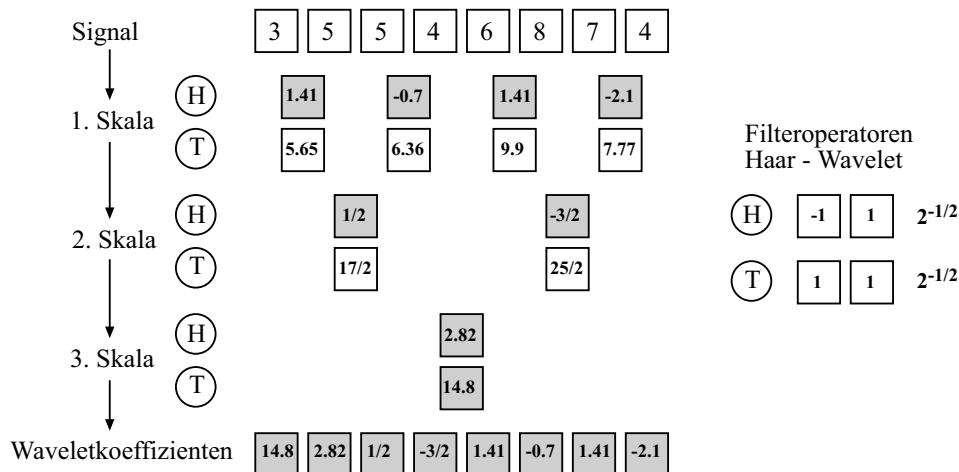


Abbildung 3.5: Schnelle Wavelet-Transformation mit dem Haar-Wavelet.
(Die zu speichernden Werte sind grau unterlegt.)

keine Dilatation des Wavelets vorgenommen wird, sondern jeweils der neue Ergebnisvektor der Skala a mit den stets gleichen Filtervektoren skalar multipliziert wird.

Aufgrund der genannten Eigenschaften bezüglich Geschwindigkeit und Umfang der berechneten Wavelet-Koeffizienten ist die Kompression von Rasterdaten eine beliebte Anwendung für die schnelle Wavelet-Transformation.

Wird der entstandene Ergebnisvektor unter dem Gesichtspunkt der Analyse betrachtet, so hat dieser durch das "Verschwinden" von Koeffizienten ein Defizit. Ein Wavelet-Koeffizient steht bei Nutzung des Haar-Wavelets für zwei Signalpositionen in der ersten Skala und sogar nur ein Koeffizient für vier Signalwerte in der zweiten Skala.

Die Stationäre Wavelet-Transformation (SWT) versucht dieses Defizit für die Analyse der Koeffizienten auszugleichen. Dies geschieht durch Verschiebung des Wavelets bzw. des zugehörigen Filtervektors um nur eine Stelle. Somit ergibt sich für jede Skala ein Ergebnisvektor mit ebenso vielen Koeffizienten wie dem Eingangsvektor. Um die Rekonstruktion sicherzustellen, wird zusätzlich der Summenkoeffizient der höchsten Approximation gespeichert. Die Gesamtanzahl an Ergebniswerten beträgt danach $n \cdot 2^n + 1$ Koeffizienten, welche in Hinblick auf die Synthese des ursprünglichen Signals stark redundant sind. Dies ist in Abbildung 3.6 für die SWT mit dem Haar-Wavelet dargestellt.

Im Bild ist zu erkennen, daß bereits bei der Transformation in die erste Skala verfälschte Wavelet-Koeffizienten (WK) berechnet werden. Diese sind durch die strichlierte Umrandung hervorgehoben. Die Ursache der Verfälschung ist einerseits die Länge des Filters und andererseits die Wiederholung (*Cycling*) des Signals, wenn der letzte Signalwert erreicht wurde. Der Effekt ist bei nachfolgenden Verwendungen der WK zu beachten und wird im Abschnitt 3.2.3 näher erläutert.

3.1.4 APPROXIMATIONSEIGENSCHAFTEN DES HAAR WAVELETS

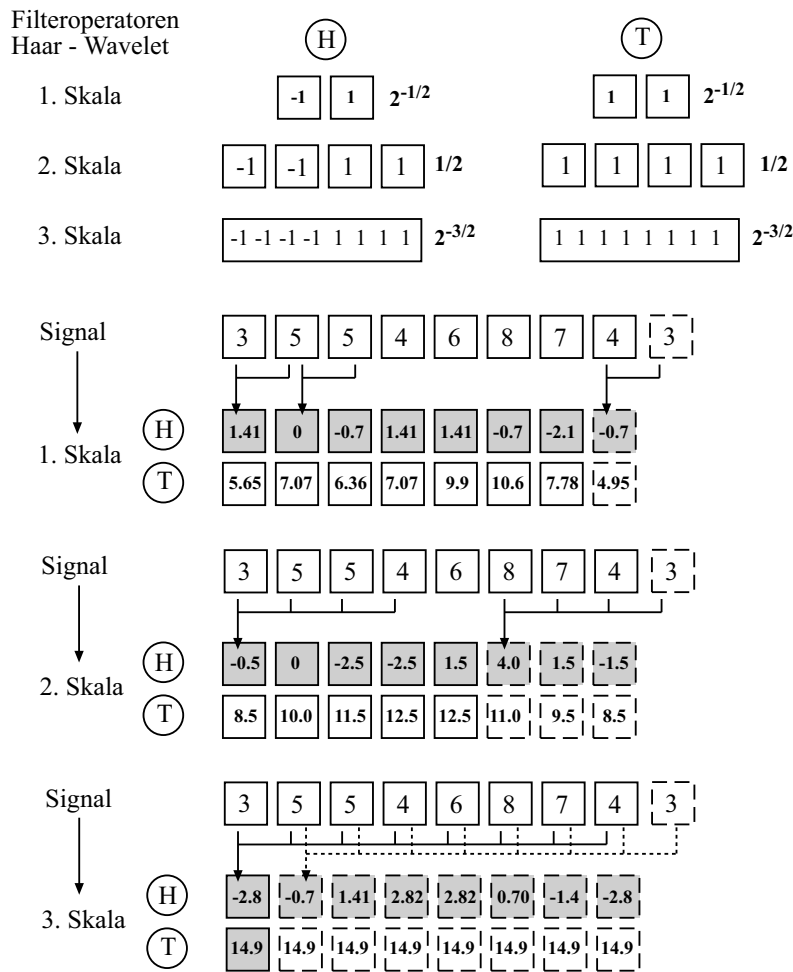


Abbildung 3.6: Stationäre Wavelet-Transformation mit dem Haar-Wavelet.
(Die zu speichernden Werte sind grau unterlegt.)

3.1.4 Approximationseigenschaften des Haar-Wavelets

In der Literatur wird unter Approximationseigenschaft die Genauigkeit der Annäherung des zurücktransformierten Signals an das Originalsignal verstanden. Hier hingegen geht es um die Eigenschaft, daß die für ein spezielles Wavelet berechneten Wavelet-Koeffizienten funktionale Ableitungen erster, zweiter und höherer Art approximieren.

Bestimmt wird diese Eigenschaft durch das niedrigste *Moment* eines Wavelets, das nicht Null ist. Das n -te Moment eines Wavelets berechnet sich nach folgender Formel:

$$M_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n \psi(x) dx. \quad (3.12)$$

Da für eine Wavelet die Forderung aus Gleichung (3.4) gilt, ist das 0. Moment (der Mittelwert) immer Null. Verschwinden $n - 1$ Momente eines Wavelets, so ist das Wavelet von n -ter Ordnung und die Wavelet-Transformation approximiert die n -te Ableitung.

Für die Lösung der Aufgabenstellung ist es wichtig, daß bei der WT die erste Ableitung der Tangentenfunktion bestimmt wird. Dadurch kann eine krümmungsabhängige Filterung erzielt werden.

3.1.4 APPROXIMATIONSEIGENSCHAFTEN DES HAAR WAVELETS

Hierfür ist nur ein orthonormales Wavelet 1. Ordnung geeignet, da dieses die erste Ableitung approximiert und eine Synthese auf Basis der Multiskalenanalyse erlaubt. Das bereits genannte **Haar-Wavelet** erfüllt diese Anforderungen. Es ist das erste bekannte Wavelet und wurde bereits 1910 von A. Haar definiert:

$$\Psi_{a,b}(x) := 2^{-\frac{a}{2}}\psi(2^{-a}x - b), \quad (3.13)$$

mit dem ganzzahligen Dilatationswert a und dem ganzzahligen Translationswert b . Der Faktor $2^{-\frac{a}{2}}$ bewirkt, daß das Wavelet ψ in jeder Skala a die Norm 1 hat.

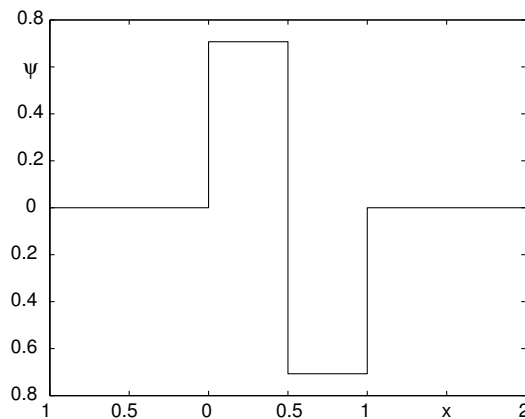


Abbildung 3.7: Das Haar-Wavelet

Für die erste Skala ergibt sich der diskrete Filtervektor von ψ zu:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot [1 \quad -1]. \quad (3.14)$$

Unter der Bedingung, daß die Momente $j - 1$ gleich Null sind, lassen sich die Momente des Haar-Wavelets diskret berechnen mit:

$$M_j = \sum_{k=1}^n k^j \cdot h_k. \quad (3.15)$$

In der Formel beschreibt n die Anzahl der Filterkoeffizienten und h_k den Koeffizient der Stelle k .

Werden die Werte aus (3.14) in (3.15) eingesetzt, ergibt sich:

$$M_{0,Haar} = 0 \quad , \quad M_{1,Haar} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{sowie:} \quad \tilde{M}_{2,Haar} = -\frac{3}{2}\sqrt{2}. \quad (3.16)$$

Das hier angegebene 2. Moment $\tilde{M}_{2,Haar}$ ist nicht das echte 2. Moment, da jenes mit Hilfe der niederen Momente berechnet werden muß. Stattdessen wird die Formel (3.15) mit $j = 2$ benutzt. Die Angabe des ‘‘Basismomentes‘‘ \tilde{M}_2 erfolgt, weil nur dieses für die weiteren Berechnungen benötigt wird.

Obwohl die Haarsche Basis wichtig und einfach ist, hat sie in der Praxis nur wenig Bedeutung, weil das Haar-Wavelet Sprungstellen besitzt und die Forderung (B3) aus Abschnitt 3.1.1 nur schlecht erfüllt. Dennoch soll das Wavelet in dieser Arbeit aufgrund seiner Einfachheit und der Existenz von nur wenigen anderen Standard-Wavelets 1. Ordnung verwendet werden.

Für die stetige WT gilt der Satz (vgl. [Beyer und Meier, 2001]):

“Bei einem Wavelet n-ter Ordnung ist die Wavelettransformierte für $a \rightarrow 0$ proportional zur n-ten Ableitung.“

Da der Grenzübergang $a \rightarrow 0$ diskret nicht möglich ist, kommt es zu Problemen bei der Lokalisierung der berechneten Ableitung bzw. der Wavelet-Koeffizienten (WK). Die Approximation wird praktisch als “Mittelwert“ benachbarter Koeffizienten gebildet und es treten bei der Transformation Phasenverschiebungen auf. Da die n-te Ableitung nur approximiert wird, ist ein Proportionalitätsfaktor zu berechnen, um die wirklichen Ableitungsbeträge zu erhalten. [Beyer und Meier, 2001] leiten die an den WK anzubringenden Korrekturen zum Erhalt der wahren Ableitungen an Hand von Testfunktionen her. Die amplitudenkorrigierte n-te Ableitung berechnet sich mit der Formel:

$$f^{(n)}(x_i - x_\varphi) = \frac{n!}{M_n(\Delta x)^n} \cdot w(f, x_i). \quad (3.17)$$

Es entspricht Δx der Tastweite, M_n dem n-ten Moment und w ist der Vektor der Wavelet-Koeffizienten. In der vorliegenden Arbeit wird nur die erste Ableitung benötigt. Deren **Skalierungsfaktor** s_1 für die Korrektur der erste Skala $a = 1$ ergibt sich mit der Formel (3.17) zu:

$$s_1 = \frac{1!}{M_1(\Delta x)^1}. \quad (3.18)$$

Speziell für den Faktor des Haar-Wavelet erhält man:

$$s_{1,a=1}^{Haar} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}(\Delta x)} = \frac{\sqrt{2}}{\Delta x}. \quad (3.19)$$

Sollen die “geglätteten“ 1. Ableitungen für höhere Skalen bestimmt werden, ergeben sich allerdings andere Korrekturwerte.

Bei der Realisierung im Programmsystem MATLAB werden die Koeffizienten des Haar-Wavelet nur als Werte [1 -1] ohne den Normierungsfaktor aus (3.13) benutzt. Folglich ist dieser mit in die Gleichung einzubeziehen. Es entsteht unter der Benutzung von Formel (3.15):

$$s_{1,a}^{Haar} = \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^a \sum_{k=1}^n k^1 \cdot h_k \right) \Delta x}, \quad (3.20)$$

wobei die Filterkoeffizienten h_k nur den Wert 1 oder -1 besitzen.

Die Verschiebung x_φ der ersten Ableitung des Signals - der **Lokalisationsfehler** - ist abhängig vom ersten und zweiten Moment des Wavelets. Die von Beyer ermittelte Formel zur Bestimmung des Wertes lautet:

$$x_\varphi = \left(n_c \cdot 2^{a-1} - \frac{\tilde{M}_2}{2M_1} \right) \Delta x, \quad (3.21)$$

mit der Anzahl der Filterkoeffizienten des Wavelets n_c , dem bereits beschriebenen zweiten Basismoment \tilde{M}_2 sowie der Skala a . Für das Haar-Wavelet der ersten Skala $a = 1$ mit $n_c^{(a=1)} = 2$ berechnet sich die Phasenverschiebung zu:

$$x_\varphi^{Haar}(a = 1) = \left(2 \cdot 2^{1-1} - \frac{\tilde{M}_2}{2M_1} \right) \Delta x = \frac{1}{2} \Delta x. \quad (3.22)$$

3.1.4 APPROXIMATIONSEIGENSCHAFTEN DES HAAR WAVELETS

Bei der Umsetzung im Programm erfolgt eine Modifikation der Formel, weil die WK verschiedener Skalen korrigiert werden sollen:

$$x_{\varphi}^{Haar}(a) = \left(n_c(a) - \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^a \sum_{k=1}^n k^2 \cdot h_k}{2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^a \sum_{k=1}^n k^1 \cdot h_k} \right) \Delta x. \quad (3.23)$$

Um schließlich die ermittelte Verschiebung $x_{\varphi}(a)$ anzubringen, ist eine Translation und eine Interpolation durchzuführen. Der Einfachheit halber ist eine lineare Interpolation möglich. Durch die Verschiebung entsteht vor allem bei höheren Skalen ein Effekt, der zu beachten ist: So müssen durch die Verschiebung die ersten oder letzten WK Null gesetzt werden, da keine Ableitungswerte für diese Positionen vorhanden sind. In der Abbildung 3.8 sind die Korrekturen für die Approximation der ersten Ableitung eines Sinussignals veranschaulicht. Es wurden dafür die WK der dritten Skala benutzt.

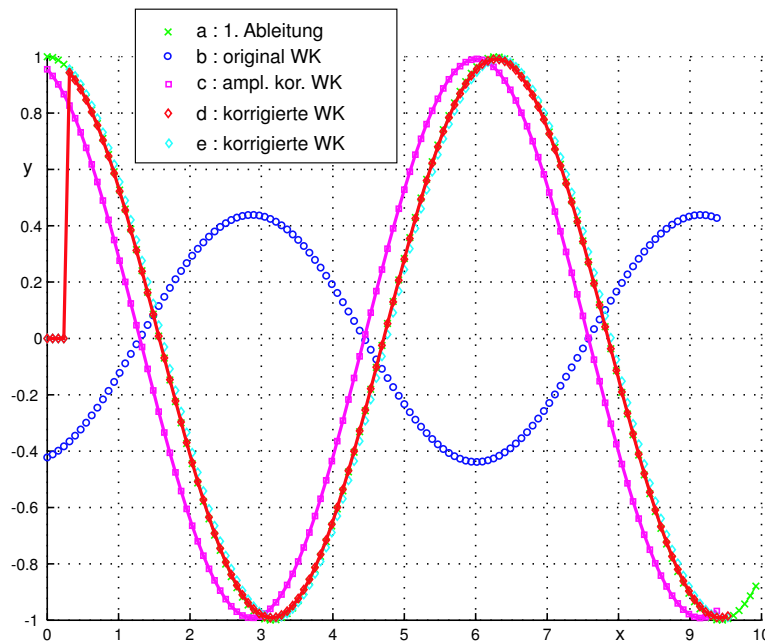


Abbildung 3.8: Amplituden- und Phasenkorrektur der Wavelet-Koeffizienten zum Erhalt der 1. Ableitung einer Sinusfunktion.

(a) 1. Ableitung, (b) unkorrigierte Wavelet-Koeffizienten (WK), (c) amplitudenkorrigierte WK, (d) amplituden- und phasenkorrigierte sowie interpolierte WK, (e) entspricht (d) ohne Interpolation; somit nur um ganzzahlige Δx verschoben.

3.2 Glättung mit Wavelets

3.2.1 Glättungsfiler im Wavelet-Bereich

Die Wavelet-Transformation (WT) führt zu einer Signaldarstellung im Phasenraum auf Basis eines Wavelets ψ . Dies bedeutet, daß ein Signal durch die Multiskalenanalyse in verschiedene Frequenzbänder zerlegt wird, welche als Skalen bezeichnet werden. Durch Veränderung der Wavelet-Koeffizienten und Rücktransformation in den Ortsbereich entsteht ein gefiltertes Signal. Der Vorgang läßt sich mit der Filterung im Fourier-Bereich vergleichen.

In [Bethge et al., 1997] sind zwei Möglichkeiten angegeben, um mit der WT eine Filterung durchzuführen. Zum einen kann durch Schwellwertbildung auf der Ordinate und zum anderen durch Anwendung einer Skalensperre gefiltert werden. Beide Verfahren sind nicht nur für die Filterung zur Analyse von Daten geeignet, sondern finden ebenfalls bei der Kompression von Daten einen Anwendungsschwerpunkt.

Bei der **Schwellwertbildung auf der Ordinate** werden die berechneten Wavelet-Koeffizienten (WK) einzeln betrachtet und mit einem Schwellwert verglichen. Unterschreitet der Betrag des WK den Schwellwert, so wird dem Koeffizient der Wert Null zugewiesen (*hard thresholding* - vgl. Abb. 3.9). Beim *soft thresholding* bekommen Koeffizienten, die den Schwellwert unterschreiten, ebenfalls den Wert Null zugeteilt. Übersteigen sie hingegen den Grenzwert, dann werden sie um den selbigen reduziert, wie im rechten Bild von Abb. 3.9 zu erkennen ist.

Die Festlegung des Schwellwertes kann dabei skalenabhängig erfolgen, da höhere Skalen in der Regel größere Koeffizientenbeträge enthalten. Dies ist darauf zurückzuführen, daß diese Skalen "weiteren" Mittelwerten entsprechen. Das gilt aber nur dann, wenn der Mittelwert des Signals ungleich Null ist.

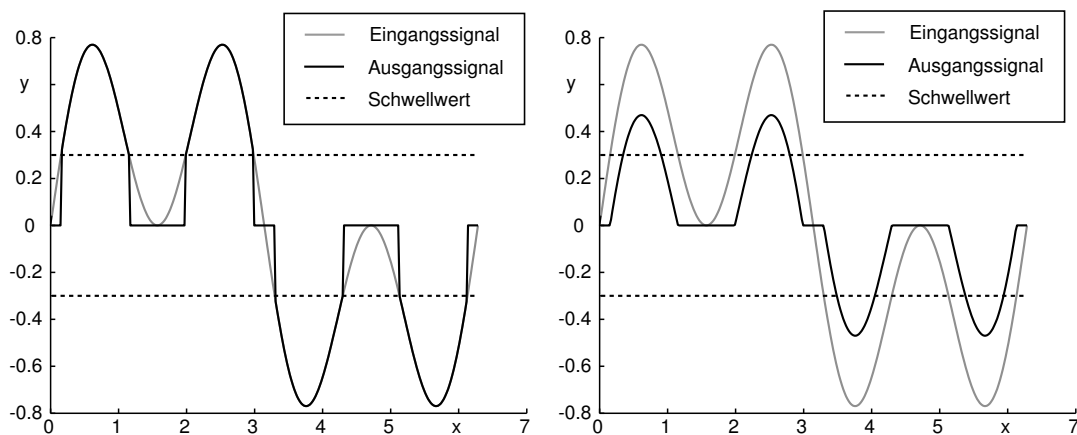


Abbildung 3.9: Glättung mittels Threshold im Wavelet-Bereich.

Links: *hard thresholding*, Rechts: *soft thresholding*

Wie in den Graphen der Abbildung 3.9 zu erkennen ist, hängt das Ergebnis der Filterung vom Signal ab. Demzufolge läßt sich für die Schwellwertbildung auf der Ordinate keine allgemeingültige analytische Lösung für die Transformation der Filtervorschrift in den Fourier-Bereich ermitteln (vgl. [Bethge et al., 1997]), und es kann keine Filtercharakteristik angegeben werden. Lediglich für die Transformation und Filterung

3.2.2 DURCHLASSCHARAKTERISTIK DER SKALENSPERRE

eines einzeln gegebenen Signals ist dies möglich. Die Durchlaßcharakteristik wird dann aus dem Vergleich der numerisch bestimmten Fourier-Transformierten *vor* und *nach* der Filterung erhalten.

Die **Skalensperre** als zweite Filtermethode beruht darauf, die Wavelet-Koeffizienten einer gesamten Skala Null zu setzen. Dies entspricht dem Ausfiltern des der Skala entsprechenden Frequenzbandes, also einer Bandsperre. Werden nacheinander die kleinen Skalen Null gesetzt und das Signal aus dem Wavelet-Bereich in den Ortsbereich zurücktransformiert, ist dies einer stärker werdenden Tiefpaßfilterung vergleichbar. Da die Signaländerungen nur von der manipulierten Skala und nicht vom Signal abhängig sind, kann bei der Skalensperre die Durchlaßcharakteristik für bestimmte Wavelets analytisch berechnet werden.

Ein Ziel der Arbeit ist der Vergleich zwischen der Filterung mit Wavelets (speziell mit dem Haar-Wavelet) und der Filterung mit Snakes und Tafus. Dafür ist es unter anderem erforderlich, die Durchlaßcharakteristik (D-Char.) beider Filterungen zu ermitteln, um mit ihrer Hilfe auf die Steuerparameter für die Tafus schließen zu können. Dies läßt sich allerdings nur für eine signalunabhängige Filterung wie die Skalensperre realisieren. Deswegen soll diese in der Arbeit verwendet werden. Im folgenden Abschnitt wird die D-Char. für das Haar-Wavelet - in Abhängigkeit von der Skala a - sowohl auf numerischem Wege ermittelt als auch analytisch bestimmt.

3.2.2 Bestimmung der Durchlaßcharakteristik der Skalensperre für das Haar-Wavelet

Wie von [Bethge et al., 1997] beschrieben wird, ist die Durchlaßcharakteristik (D-Char.) der Skalensperre für jedes Wavelet verschieden. Das bedeutet, daß dieselbe Skala a für verschiedene Wavelets auch verschiedene Frequenzen enthält. Demzufolge ist die Zuordnung zwischen mittlerer Bandfrequenz und der Skala für das Haar-Wavelet zu klären.

Zuordnung zwischen Skala und Frequenz des Haar-Wavelets

Aufgrund der Anwendung der Multiskalenanalyse und der damit verbundenen dyadischen Dilatation des Wavelets bildet die nächst niedere Skala immer die doppelte mittlere Frequenz der vorhergehenden Skala ab. Die Lösung des Zuordnungsproblems kann in drei verschiedenen Varianten erfolgen:

- C 1. Die Autoren der MATLAB-Wavelet-Toolbox [Misiti et al., 2000, Seite 6-60] schlagen vor, zuerst die mittlere Frequenz F_c (center frequency) des Wavelets ψ aus der Fourier-Transformierten zu berechnen. Dabei ist die mittlere Frequenz die, welcher der größte Betrag der Fourier-Koeffizienten zugeordnet ist. Danach ist die Skalenfrequenz F_a der Skala a mit der Abtastperiode Δ nach folgender Formel bestimmbar:

$$F_a = \frac{\Delta \cdot F_c}{a}. \quad (3.24)$$

- C 2. Hingegen transformiert [Weichsel, 2000] Sinusfunktionen bekannter Frequenz in den Wavelet-Bereich und vergleicht die maximalen Koeffizienten in einer Skala für verschiedene Sinusfunktionen. Der Skala wird dann die Frequenz der Sinusfunktion zugeordnet, welche die größte Amplitude

3.2.2 DURCHLASSCHARAKTERISTIK DER SKALENSPERRE

in der Skala hervorruft.

- C 3. Eine weitere Möglichkeit ist die Erstellung eines Signals s im Fourier-Bereich (FB), welches zumindest theoretisch alle Frequenzen enthält und als *weißes Rauschen* bekannt ist. Dieses wird in den Ortsbereich (OB) transformiert und anschließend in den Wavelet-Bereich (WB) mit dem Wavelet ψ überführt. Hier erfolgt ein Bandpaß für jede Skala, indem die Koeffizienten aller anderen Skalen Null gesetzt werden. Das gefilterte Signal wird mit der inversen Wavelet-Transformation in den Ortsbereich zurücktransformiert und wieder im Fourier-Bereich abgebildet. Nun kann die mittlere Skalenfrequenz der Frequenz zugeordnet werden, welche die maximale Amplitude im Frequenzbild erzeugt (vgl. Abbildung 3.10).

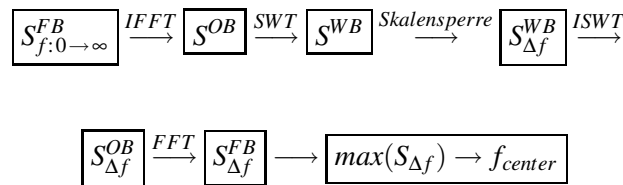


Abbildung 3.10: Schema zur Frequenzbestimmung einer Skala der Wavelet-Transformation

In Tabelle 3.1 wurden die Ergebnisse der verschiedenen Verfahren zusammengefaßt. Es ist zu erkennen, daß mit Variante (C 2.) und (C 3.) die gleichen mittleren Skalenfrequenzen ermittelt wurden. Desweiteren ist die Halbierung der Kreisfrequenz ω von der niederen zur höheren Skala ersichtlich.

Tabelle 3.1: Vergleich ermittelter Skalenfrequenzen für das Haar Wavelet

	C 1.	C 2.	C 3.
Skala	F_c des Wavelets (WaveletToolbox)	WT von Sinusfunktionen [Weichsel, 2000]	Filterung von weißem Rauschen
Kreisfrequenz ω			
1	3.129	3.140	3.139
2	1.565	1.230	1.230
3	0.782	0.590	0.590
4	0.391	0.292	0.292
5	0.196	0.146	0.146
6	0.098	0.0729	0.0729
7	0.049	0.0364	0.0364
8	0.024	0.0182	0.0182
9	0.012	0.0091	0.0091

Bestimmung der Durchlaßcharakteristik

Die Bestimmung der Durchlaßcharakteristik für die einzelnen Skalensperren erfolgt numerisch und analytisch. Die numerische Berechnung erfolgte ähnlich (C 3.), indem auch hier im Fourier-Bereich *weißes Rauschen* definiert wurde. Dieses wurde in den Orts- und Wavelet-Bereich transformiert und im Letzteren gefiltert. Die Koeffizienten der gewünschten niederen Skalen werden Null gesetzt und das Signal zunächst in den Orts-Bereich und dann den Fourier-Bereich zurücktransformiert. Bei dieser Anwendung entfällt die Analyse des FB-Signals auf eine einzelne Frequenz wie im vorherigen Abschnitt, da die Durchlaßcharakteristik (D-Char.) direkt ablesbar ist. Die Grafiken der Abbildung 3.11 sollen das Vorgehen noch einmal veranschaulichen.

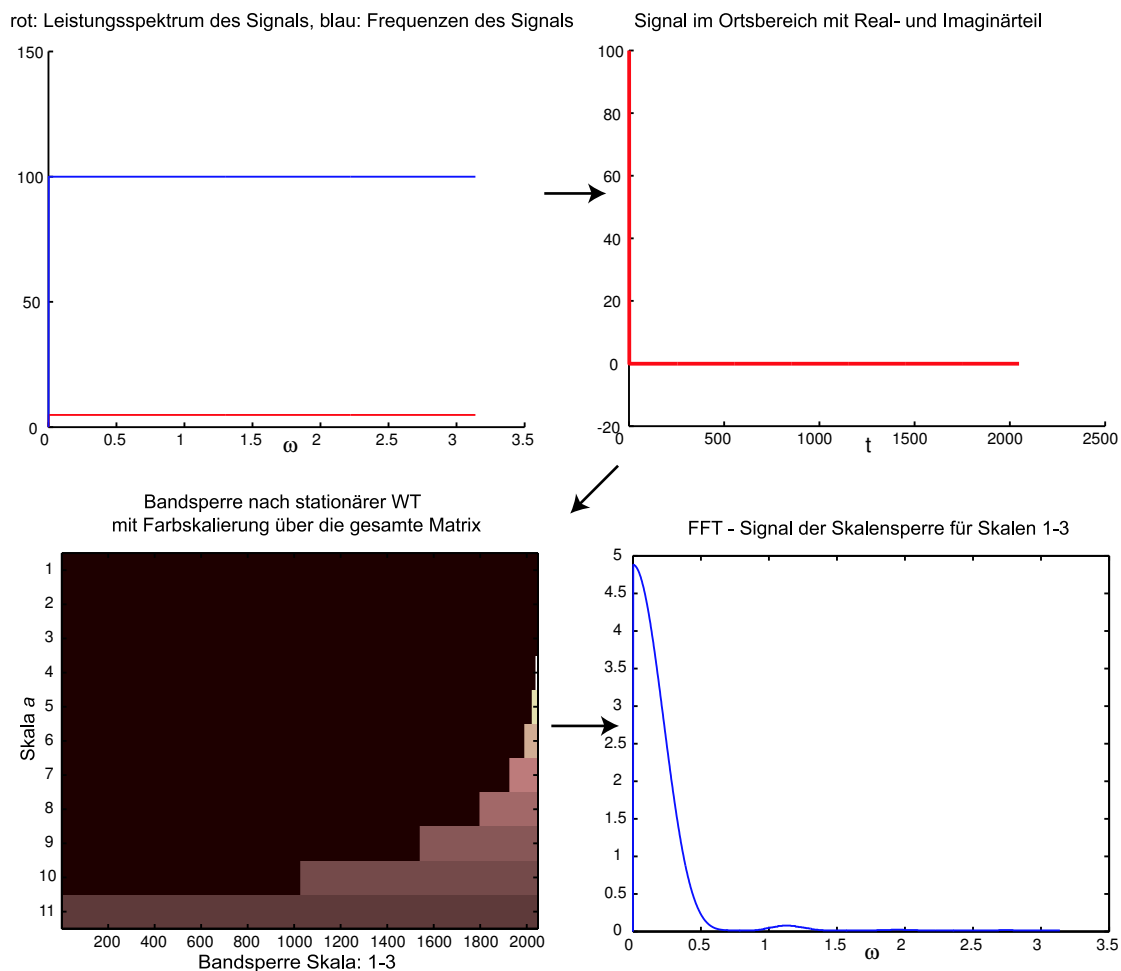


Abbildung 3.11: Ermittlung der Durchlaßcharakteristik der Skalensperre im Wavelet-Bereich.

Links oben: Signaldefinition im FB (blaue Linie). *Rechts oben:* Signal im Ortsbereich / Zeitbereich. *Links unten:* Filterung durch Sperre der Skalen 1-3. *Rechts unten:* Fourier-Transformierte des rücktransformierten und gefilterten Signals, bzw. Durchlaßcharakteristik für die Sperrungen der Skalen 1-3.

Wird die berechnete D-Char. betrachtet, so sind Nebenmaxima im Frequenzspektrum festzustellen, die nicht sehr gut in der Abbildung 3.11 (rechts unten) zu sehen sind. Die Fourier-Transformierte $\hat{\psi}$ des Haar-Wavelets weist ebenfalls auf die Existenz der Nebenmaxima hin. Dies ist am Sinus-Term der For-

3.2.3 REALISIERUNG DER GLÄTTUNG MIT WAVELETS

mel erkennbar:

$$|\hat{\Psi}(\omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{16}{\omega^2} \sin^4\left(\frac{\omega}{4}\right). \quad (3.25)$$

Die Fourier-Transformierte klingt nur langsam ab und ist somit schlecht im Frequenzbereich lokalisiert. Dies ist in den Sprungstellen der Haarschen Wavelet-Funktionen - als Ursache der Nebenmaxima - begründet (siehe Abbildung 3.7).

Bei der numerischen Ermittlung der D-Char. sind die genannten Effekte aus Abschnitt 3.1.2 und 3.1.3 durch *Cycling* und dyadische Signallänge vernachlässigbar bzw. nicht vorhanden.

Neben der numerischen Bestimmung soll zur Vervollständigung die von [Meier, 2002] analytisch ermittelte skalenabhängige Durchlaßcharakteristik angegeben werden. Deren Berechnung ist im Anhang A zu finden.

$$G_F(\omega) = \frac{1}{\ln(2)} \left(\frac{\sin^3 x (\sin x - 4 \cos x)}{2x^2} + ci(4x) - ci(2x) \right) \quad (3.26)$$

Nachdem die Filtercharakteristiken für die Glättung mit Wavelets ermittelt wurden, ist im Folgenden erklärt, wie eine Beziehung zwischen Wavelet-Glättung und Tafus-Glättung herstellbar ist.

Überlegungen zur Steuerung der Glättung mit Tafus

Für die Waveletfilterung stellt die Tangentenwinkelfunktion (TWF) das zu filternde bzw. zu glättende Signal dar. Durch die im Kapitel 3.1.4 beschriebenen Approximationseigenschaften der Wavelet-Transformation, realisieren die phasen- und amplitudenkorrigierten Wavelet-Koeffizienten die Kurvenkrümmung. Diese entspricht der ersten Ableitung der TWF und ist eine spezielle Eigenschaft von Kurven. Die Transformation der TWF in den Wavelet-Bereich (WB) zerlegt die Funktion in verschiedene Frequenzbänder (Skalen). Wird nun die TWF im WB durch Sperrfilterung von Skalen geglättet, so ist diese Glättung einerseits frequenzabhängig und andererseits krümmungsabhängig, denn hohe Frequenzen der TWF entsprechen großen Krümmungen (starke Kurvigkeit).

Ein weiteres Linienglättungsverfahren zur Filterung der TWF ist das Tafus-Modell. Nachteil dieses Verfahrens ist die schwere Handhabbarkeit der Steuerparameter α und β . Wird vorausgesetzt, daß sich für bestimmte Werte von α, β eine Durchlaßcharakteristik für die TWF bestimmen läßt, dann sind beide Filtercharakteristiken vergleichbar. Somit lassen sich die Steuerparameter für spezielle Skalensperren ermitteln und möglicherweise allgemeine Schlußfolgerungen zur Steuerung der Tafus ziehen.

3.2.3 Effekte bei der Realisierung der Glättung mit Wavelets

Für die Umsetzung der Linienglättung mittels Sperrfilterung wurde die *Stationäre Wavelet-Transformation* benutzt, da sich mit ihr für (fast) jeden Punkt der Linie ein Wavelet-Koeffizient berechnen läßt. Wichtig ist dies im Kapitel 3.3 bei der Berechnung von Kenngrößen aus Wavelet-Koeffizienten. Der Algorithmus zur Glättung der in den WB transformierten Tangentenwinkelfunktion setzt Skala für Skala die Koeffizienten zu Null. Das "Nullsetzen" beginnt in der kleinsten Skala, welche die feinsten Details enthält.

3.2.3 REALISIERUNG DER GLÄTTUNG MIT WAVELETS

Es entstehen $a - 1$ Filterstufen in Abhängigkeit von der Signallänge n , wobei a der Anzahl an Skalen entspricht.

Diese berechnet sich aus:

$$a = \text{fix}\left(\frac{\log n}{\log 2}\right) + 1. \quad (3.27)$$

Der MATLAB-Operator $\text{fix}()$ gibt den ganzzahlige Anteil des Quotienten zurück.

Wie in Kapitel 3.1.2 angeführt wird, benötigt die diskrete Wavelet-Transformation ein dyadisches Eingangssignal. Besitzt die berechnete TWF weniger als 2^a Werte, so wird im Programm durch *Zeropadding* der Vektor auf diese Länge aufgefüllt. Beim Zeropadding werden so viele Nullen an den Vektor angehängt bis 2^a Werte erreicht werden. Andere Möglichkeiten um den Signalvektor zu erweitern, sind die periodische Fortführung des Signals, Spiegelung der Randwerte (z. B. bei der zweidimensionalen WT von Bildern sinnvoll) oder *Smooth padding*, bei dem das Signal an den Rändern extrapoliert wird (vgl. [Misiti et al., 2000]). Nach der Rücktransformation des gefilterten Signals ist der Vektor wieder auf seine Originallänge zu kürzen.

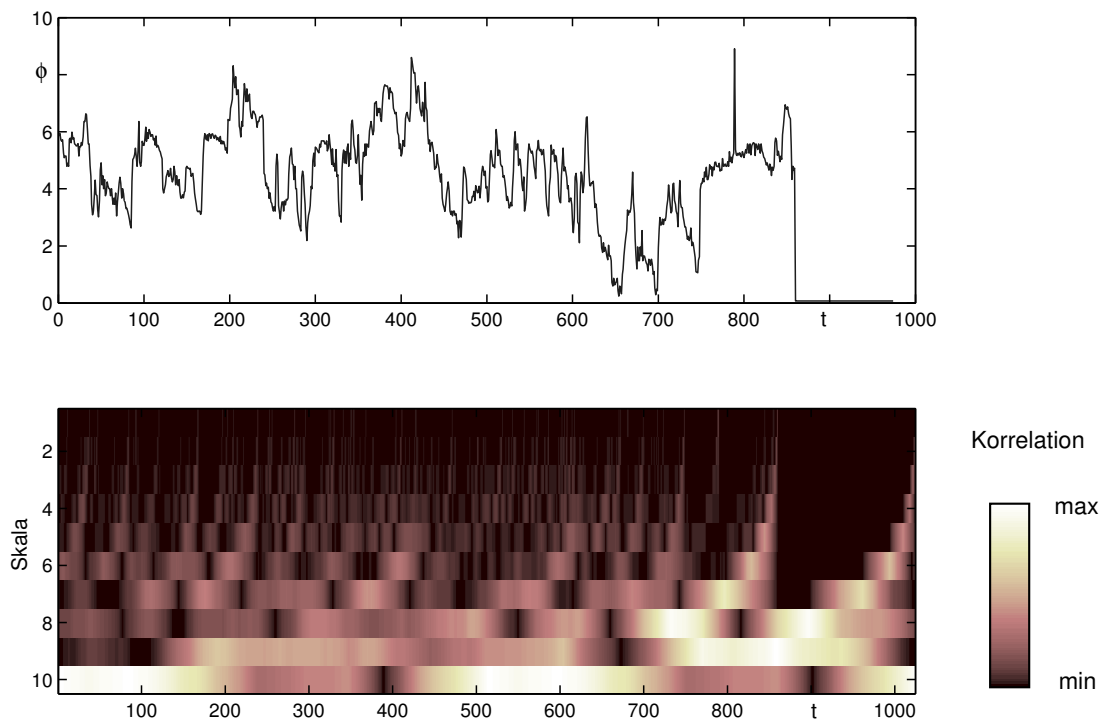


Abbildung 3.12: Stationäre Wavelet-Transformation eines Signals.

Oben: Mit Zeropadding auf dyadische Länge erweiterte Tangentenwinkelfunktion. *Unten:* Stationäre Wavelet-Transformation der Tangentenwinkelfunktion mit skalenweiser Darstellung der Koeffizienten. Die kleinste Skala ($a = 1$, oben) enthält die feinsten Details des Signals.

Eine weitere Verfälschung von berechneten Koeffizienten erfolgt durch das in Kapitel 3.1.3 genannte *Cycling*. Wird das Signal wieder synthetisiert ohne eine Filterung vorzunehmen, ist dieser Effekt nicht zu beachten. Wird aber gefiltert und dann rücktransformiert, werden die Randwerte des ursprünglichen Signals stärker verändert als durch die Filterung bezweckt. Die Randverzerrungen durch Cycling sind skalenabhängig, d.h. verknüpft mit der Länge des skalenabhängig dilatierten Wavelets.

3.2.3 REALISIERUNG DER GLÄTTUNG MIT WAVELETS

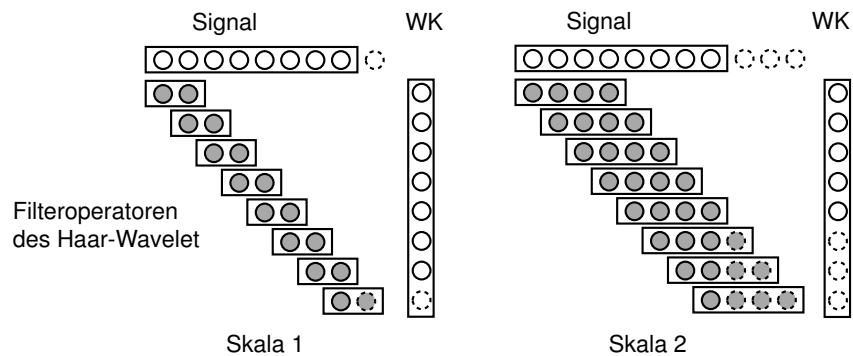


Abbildung 3.13: Stationäre Transformation mit dem Haar-Wavelet und Berechnung der Koeffizienten der ersten und zweiten Skala.

Der Effekt ist speziell für das Haar Wavelet in der Abbildung 3.13 dargestellt. Dort ist zu sehen, daß sich für die erste Skala der letzte (unterste) Koeffizient aus einem echten Signalwert und einem zusätzlichen Signalwert berechnet. Die zusätzlichen Signalwerte werden durch das periodische Anhängen des Signals an sich selbst (*Cycling*) erhalten. (Im Bild werden die angehangenen Werte mit einem unterbrochenem Kreiszeichen dargestellt.) Der letzte berechnete Koeffizient der ersten Skala ist ein verfälschter Koeffizient. Das Gleiche gilt für die zweite Skala. Da sich aber die Filterbreite vergrößert hat, steigt auch die Anzahl der verfälschten Koeffizienten. Für das Haar-Wavelet ergibt sich die Anzahl solcher fehlerhaften Werte in Abhängigkeit von der Skala k zu:

$$w_{c_v}(k)^{Haar} = 2^k - 1. \quad (3.28)$$

Dies hat zur Folge, daß in der höchsten Skala (größte Details) nur noch ein Koeffizient richtig berechnet wird.

An welcher Stelle dieser Effekt auftaucht, also am linken oder rechten Rand des synthetisierten Signals, hängt vom benutzten Programm ab. MATLAB bietet zwei Möglichkeiten um Wavelet-Transformationen durchzuführen. Die "Wavelet Toolbox" von MathWorks beginnt bei der Faltung mit den ersten Werten von Signalwertvektor und Haar-Filtervektor. Die verfälschten Koeffizienten treten am Ende auf, wie es in der Abbildung 3.13 dargestellt ist. Hingegen wird beim Programmmodul "WaveLab" der Stanford University der Wavelet-Filtervektor am Anfang gegen den Signalwertvektor verschoben. Es wird zu Beginn das erste Element des Signalvektors mit dem letzten Element des Filtervektors gefaltet. Der Randeffekt durch Cycling tritt somit am Anfang des gefilterten und zurücktransformierten Signals auf. Wird WaveLab für die Umsetzung der Stationären WT benutzt, dann gibt es eine Verzerrung der Randwerte am Anfang durch Cycling und am Ende des Signalvektors durch Zeropadding. Bei der Wavelet Toolbox sind die Verzerrungen nur am Ende vorzufinden.

Anmerkung:

Die obigen Aussagen zur Randverzerrung gelten nur für das *Haar-Wavelet*. Tests mit dem *Daubechies2* (*Daubechies4*)³ - Wavelet, welches in der ersten Skala 4 Filterkoeffizienten besitzt, haben in der Ablage

³Die Daubechies Waveletfamilie wird in der Literatur nicht einheitlich numeriert. So entspricht das Daubechies2 z. B. dem Haar-Wavelet (db1) und das Daubechies4 dem Daubechies2 (db2)

der verfälschten Koeffizienten zum Teil andere Ergebnisse hervorgerufen. Wird WaveLab zur Realisierung der WT verwendet, so ist hierfür der Artikel [Beyer, 2002] zu empfehlen.

3.3 Ableitbare Kenngrößen aus der mit Wavelets geglätteten Linie

Im Gegensatz zur Linienglättung mit Tafus beruht die Glättung mit Snakes nicht auf der Filterung der Tangentenwinkelfunktion (TWF), sondern auf der Glättung der Koordinaten. Demzufolge ist eine Steuerung der Snakes durch Vergleich der Durchlaßcharakteristik mit der Wavelet-Filterung nicht möglich und muß durch einen anderen Ansatz erfolgen. Eine Variante besteht darin, mit dem Snakes-Algorithmus nur gering und dafür iterativ zu glätten. Die Definition sinnvoller Kenngrößen liefert einerseits Abbruchwerte für die Iteration und gewährleistet andererseits die Vergleichbarkeit zur Glättung der TWF mit Wavelets. Bereits in der Aufgabenstellung der Diplomarbeit werden Vorschläge für solche Parameter gemacht.

3.3.1 Die Linienlänge

Als ein Vergleichs- und Abbruchparameter bietet sich die Länge der zu glättenden Linie an. Hierfür können verschiedene Linienlängen definiert werden.

- D 1. Bekanntlich besteht die digitalisierte Linie aus einer Folge von n Punkten (x_i, y_i) . Die erste Möglichkeit ist die Berechnung der *Polygonzuglänge* aus der Summation der Strecken zwischen den Punkten:

$$l_{Pz} = \sum_{i=1}^{n-1} s_i \quad \text{mit:} \quad s_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}. \quad (3.29)$$

- D 2. Da der Polygonzug ein natürliches Objekt abbilden soll, ist diese diskretisierte Linienform im Vergleich zur stetigen Länge in der Natur immer zu kurz. Es wurden daher von [Bethge, 1994] zwei weitere Linienlängen vorgeschlagen, welche die reale Länge besser wiedergeben. Die erste Länge l_{KA} wurde aus der Kreisbogenapproximation hergeleitet:

$$l_{KA} = s_{1,2} \left[\text{sinc} \left(\frac{\Delta\varphi_2}{2} \right) \right]^{-1} + \sum_{i=2}^{n-2} s_i \cdot \left[\text{sinc} \left(\frac{\Delta\varphi_i + \Delta\varphi_{i+1}}{4} \right) \right]^{-1} + s_{n,n-1} \left[\text{sinc} \left(\frac{\Delta\varphi_{n-1}}{2} \right) \right]^{-1}, \quad (3.30)$$

mit:

$$s_{i,i+1} = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}, \quad (3.31)$$

$$\Delta\varphi_i = \arctan \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \arctan \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}.$$

- D 3. Die zweite Linienlänge l_{sgA} basiert auf der stochastisch geometrische Approximation:

$$l_{sgA} = \sum_{i=1}^{n-1} \Delta s_i \left[1 - \frac{1}{24(n-2)} \sum_{i=2}^{n-1} (\Delta\varphi_i)^2 \right]^{-1}. \quad (3.32)$$

3.3.2 ABLEITBARE KENNGRÖSSEN: SKALENENERGIE

Ist die Linie äquidistant digitalisiert, dann sind die beiden Linienlängen-Approximationen nur noch von der Änderung des Tangentenwinkels $\Delta\varphi$ abhängig. Speziell die Formel (3.32) enthält die Krümmungsvarianz der Linie.

Die geglätteten Punkte ergeben sich aus der neu berechneten Linie mit $(x,y) = f(s, \varphi)$. φ ist hierbei die geglättete TWF nach der Rücktransformation aus dem Wavelet-Bereich. Die Polygonzuglänge (D 1.) ist nicht von φ abhängig und kann für eine konstante Bogenlänge nicht als vergleichende Kenngröße benutzt werden.

3.3.2 Die Skalenenergie

Ein weiterer Parameter ist die Skalenenergie des wavelettransformierten Signals. Sie berechnet sich in Abhängigkeit von der Skala a für die kontinuierliche eindimensionale WT nach der Formel:

$$SE(a) = \int_R |L_\psi f(a,b)|^2 db, \quad (3.33)$$

und diskret zu:

$$SE(a) = \sum_k |wk_k(a)|^2. \quad (3.34)$$

Die Berechnung der Größe erfolgte im Programm nicht direkt nach dem Nullsetzen der entsprechenden Skalen. Stattdessen wird die gefilterte TWF nochmals in den Wavelet-Bereich transformiert und dann die Skalenenergie berechnet. Im Unterschied zur vorigen Variante ist die Skalenenergie der gefilterten Skalen nicht mehr Null. Der Plot eines solchen Skalenenergiespektrums für die verschiedenen Skalenfilterstufen ist im Bild 3.14 zu sehen.

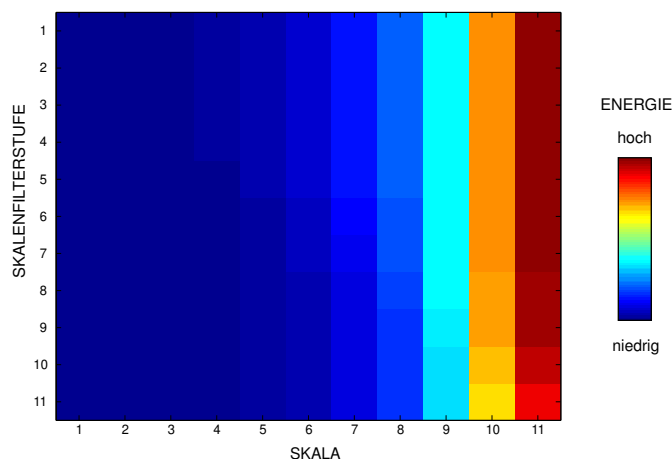


Abbildung 3.14: Skalenenergiespektrum für verschiedene Skalenfilterstufen.

Die Filterstufen verlaufen vom Spektrum der ungefilterten TWF der Linie (erste Zeile) bis zu der am stärksten geglätteten TWF (unten). Die hohen Skalen (rechts) haben eine große Energie, da sie die groben Details (Approximationen) enthalten.

Die durch Snakes geglättete Linie müßte normalerweise wieder in den Wavelet-Bereich überführt werden, um die Skalenenergie als Abbruchparameter anwenden zu können. Alternativ kann aber versucht

3.3.3 ABLEITBARE KENNGRÖSSEN: KRÜMMUNGSVARIANZ

werden, das Verhältnis der Summe der Skalenergie aller Skalen $E_{SE} = \sum_{a=1}^n SE(a)$ vor der Filterung und nach der Filterung zu bilden und dieses mit dem Verhältnis der Krümmungsenergien $E_k = \sum_i |\dot{\phi}|^2$ vorher und nachher gleichzusetzen.

3.3.3 Varianz der Richtungswinkel und der Krümmung

Ebenfalls als Steuerparameter wurde die Varianz der Richtungswinkel und die Varianz der Krümmung vorgeschlagen. Die Varianz der Richtungswinkel σ_ϕ^2 berechnet sich aus der Tangentenwinkelfunktion ϕ folgendermaßen:

$$\sigma_\phi^2 = \frac{1}{n-1} \sum (\phi - \bar{\phi})^2, \quad (3.35)$$

mit dem Erwartungs- bzw. Mittelwert $\bar{\phi}$. Für die periodischen Winkelfunktionen ist der Mittelwert mit Null anzusetzen und es ergibt sich:

$$\sigma_\phi^2 = \frac{1}{n-1} \sum \phi^2. \quad (3.36)$$

Da sich der Richtungswinkel aus den Koordinaten (x, y) des rechtwinkligen Koordinatensystems berechnet und die metrische Lagerrelation zwischen Linie und Koordinatensystem (speziell in der Geodäsie) nicht als fest betrachtet werden kann, ist die Varianz der Richtungswinkel abhängig vom Koordinatensystem. Hat die Linie eine nördliche Orientierung, ist der Betrag des Richtungswinkels etwa $\frac{\pi}{2}$. Läuft sie dagegen nach Osten, so erhält man Winkel um Null. Die Varianz der Richtungswinkel ist sehr unterschiedlich, auch wenn beide Linien gleichmäßig glatt verlaufen.

Um diesen Nachteil zu beseitigen, ist es besser die Relation zwischen den Richtungswinkeln zu verwenden. Das vom Koordinatensystem unabhängige Verhältnis der Richtungswinkel zueinander wird als Krümmung $\dot{\phi}$ bezeichnet. Sie berechnet sich wie bereits in Formel (3.31) angegeben mit:

$$\dot{\phi} = \phi_{i+1} - \phi_i = \arctan \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \arctan \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}. \quad (3.37)$$

Die **Berechnung der Krümmungsvarianz** erfolgt über:

$$\sigma_{\dot{\phi}}^2 = \frac{1}{n-1} \sum \dot{\phi}^2. \quad (3.38)$$

Dies kann für eine gefilterte Linie auf drei Wegen erfolgen. Zum einen kann die Varianz aus der rücktransformierten geglätteten TWF berechnet werden (E 1.). Zum anderen existiert eine Berechnungsmöglichkeit direkt aus den amplituden- und phasenkorrigierten Wavelet-Koeffizienten (E 2.). Bei der Berechnung der Varianz sind die in Kapitel 3.2.3 gemachten Aussagen zur Verfälschung der Koeffizienten bzw. der Randwerte zu beachten. Um noch eine Vergleichsmöglichkeit zu haben, lassen sich mit Hilfe der bereits berechneten Durchlaßcharakteristiken der Skalensperre im Ortsbereich äquivalente Filter aufstellen. Die TWF wird mit diesen Filtern im Ortsbereich geglättet und anschließend die Krümmungsvarianz berechnet (E 3.).

- E 1. Bei der rücktransformierten, geglätteten TWF existieren durch einen dritten Effekt - neben Cycling und Zeropadding - am Anfang und Ende verfälschte Werte. Ursache für die Randverfälschung sind zu Null gesetzte Koeffizienten, die für eine korrekte Synthese fehlen. Bei der Umsetzung der

3.3.3 ABLEITBARE KENNGRÖSSEN: KRÜMMUNGSVARIANZ

Glättung in einem Programm wurden die verfälschten Randwerte durch die Originalwerte ausgetauscht. Die Anzahl ergibt sich aus der höchsten Skala k , deren Koeffizienten Null gesetzt wurden. Sie beträgt für das Haar-Wavelet $2^k - 1$ Werte am Signalanfang und ebenso am Signalende. Dies hat zur Folge, daß die berechneten Varianzen nicht mehr eine genaue Meßgröße der Filterung sind. In der Abbildung 3.15 ist dies an der wieder ansteigenden blauen Kurve zu erkennen. Die Varianz nimmt hier ab einer bestimmten Glättungsstufe wieder zu, weil die korrigierten Tangentenwinkel mit steigender Glättungsstufe mehr werden und ein immer größeres Gewicht bei der Varianzberechnung erhalten.

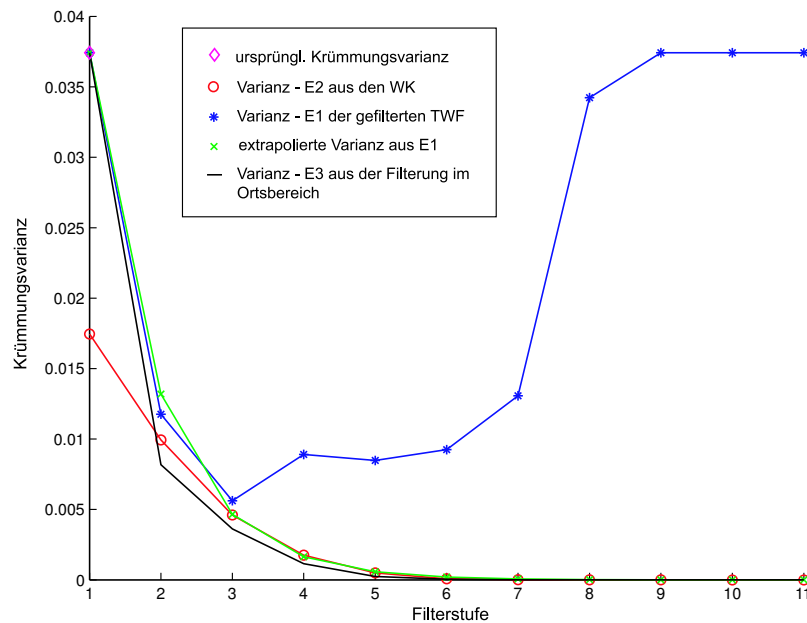


Abbildung 3.15: Berechnete Krümmungsvarianzen aus der Glättung mit Wavelets.

Es wird durch das Nullsetzen von Skalenkoeffizienten von links nach rechts stärker gefiltert (steigende Skalensperstufe).

Um die berechneten Varianzen für höhere Filterstufen trotzdem verwenden zu können, besteht eine Korrekturmöglichkeit in der Extrapolation der angegebenen (blauen) Varianzkurve. Durch deren exponentiellen Abfall empfiehlt sich für die Extrapolation der folgende Ansatz:

$$f = \sigma^2 e^{-\frac{\tau}{d}}. \quad (3.39)$$

Die Gleichung beinhaltet die Varianz σ^2 , die Ortsverschiebung τ und den Abklingparameter d . Um den Berechnungsaufwand nicht unnötig groß werden zu lassen, wird d nicht ausgleichend, sondern aus den Werten 2 und 3 der ursprünglichen Varianzkurve der Filterung berechnet. Für die Glättungsstufen $i = 2$ und $i = 3$ kann angenommen werden, daß der Einfluß der korrigierten Tangentenwinkel auf die berechnete Varianz noch nicht zu groß ist. Der Abklingparameter d der extrapolierten Varianzkurve berechnet sich dann folgendermaßen:

$$d = \frac{d_2 + d_3}{2} \quad \text{mit:} \quad d_i = \frac{-i}{\ln\left(\frac{f(i+1)}{\sigma_i^2}\right)}. \quad (3.40)$$

3.3.3 ABLEITBARE KENNGRÖSSEN: KRÜMMUNGSVARIANZ

E 2. Bei der zweiten Berechnungsvariante wird die Varianz der Krümmung aus den Wavelet-Koeffizienten berechnet. Diese werden nach Abschnitt 3.1.4 amplituden- und phasenkorrigiert, um die erste Ableitung der TWF - die Krümmung - zu erhalten. Bei der Berechnung der Varianz aus dem Krümmungsvektor ist zu beachten, daß dieser aus folgenden Gründen verkürzt ist:

- Der Vektor wird von der dyadischen auf die Originallänge gekürzt. (Längenkorrektur n_1 , skalen- und waveletunabhängig)
- Es muß eine Kürzung wegen der skalenabhängigen Filterlänge bzw. wegen des *Cycling*-Effektes erfolgen. (Längenkorrektur n_2 , skalen- und waveletabhängig)
- Schließlich ist noch die Verkürzung durch die Phasenverschiebung x_ϕ in Betracht zu ziehen. (Längenkorrektur n_3 , skalen- und waveletabhängig)

Es ergibt sich die von der Skala a und dem Wavelet ψ abhängige Länge m des Krümmungsvektors zu:

$$m(a, \psi) = m_{dyad} - n_1 - n_2(a, \psi) - n_3(a, \psi). \quad (3.41)$$

Die Varianzberechnung für jede Filterstufe i erfolgt nun mit den Koeffizienten wk der jeweils am besten approximierenden Skala. Dies ist die kleinste Skala deren Koeffizienten nicht zu null gesetzt wurden. Für die Annahme der Stationarität des Signals ist der Erwartungswert $\overline{wk} = 0$ und die Varianz berechnet sich mit:

$$\sigma_{\phi,i}^2 = \frac{1}{m_{a,\psi} - 1} \sum_{r=1}^n (wk_r - 0)^2. \quad (3.42)$$

Die berechneten Krümmungsvarianzen für die verschiedenen Skalensperren sind im Graph 3.15 rot eingezeichnet. In der Abbildung 3.16 sind zur Veranschaulichung die phasen- und amplitudenkorrigierten Wavelet-Koeffizienten der ersten Ableitung für verschiedene Skalen dargestellt. Wird die diskrete erste Ableitung mit den korrigierten WK der ersten Skala verglichen, dann ist zu erkennen, daß die lineare Interpolation einen zusätzlichen Glättungseffekt der ersten Ableitung bewirkt.

E 3. Da die beiden obigen Berechnungen der Krümmungsvarianz einer Reihe von Effekten unterliegen, soll eine dritte Variante zur Validierung der Ergebnisse verwendet werden. Es besteht die Möglichkeit aus der Durchlaßcharakteristik, die in Abschnitt 3.2.2 für die einzelnen Sperrfilterungen berechnet wurde, äquivalente Haar-Waveletfilter im Ortsbereich zu erzeugen. Mit diesen kann die TWF gefiltert und anschließend die Krümmungsvarianz berechnet werden.

Zur Berechnung der Filterkoeffizienten im Ortsbereich (OB) wird die Filterkurve mittels inverser Fourier-Transformation in selbigen überführt. Da der Ergebnisvektor der Transformation genauso viele Koeffizienten hat wie der Eingangsvektor, welcher die Durchlaßcharakteristik darstellt, sind mittels Schwellwert diejenigen Koeffizienten Null zu setzen, deren Anteil an der Berechnung des gefilterten Signals im OB zu klein ausfallen würde (vgl. Abb. 3.17).

Mit dem gekürzten Filtervektor kann nun die TWF im Ortsbereich geglättet werden. Die Berechnung der Krümmung erfolgt mit den Formeln (3.37) und (3.38). Im Bild 3.15 ist die dazugehörige Varianzkurve für die Filterstufen *schwarz* dargestellt.

3.3.3 ABLEITBARE KENNGRÖSSEN: KRÜMMUNGSVARIANZ

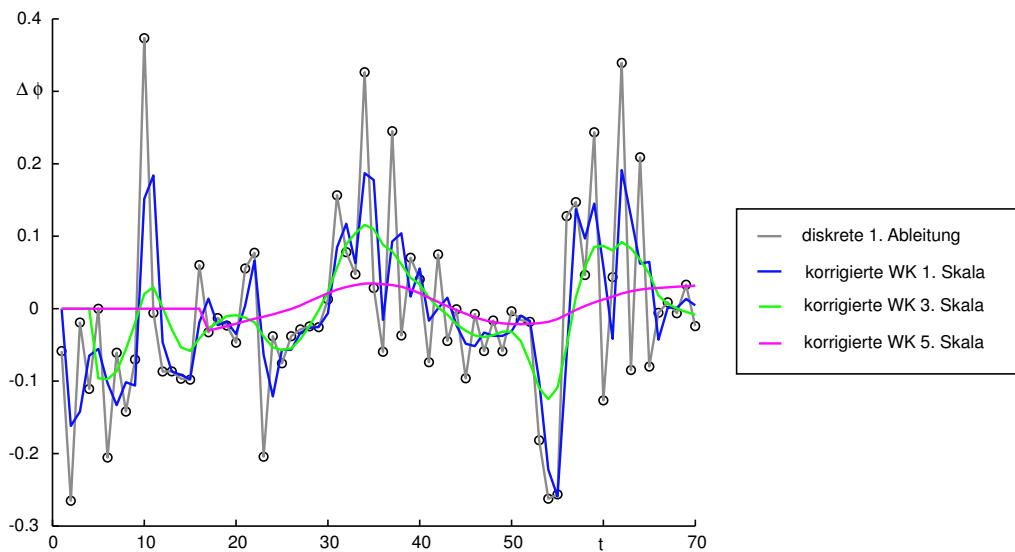


Abbildung 3.16: Approximation der Krümmung aus den Wavelet-Koeffizienten verschiedener Skalen nach Phasen- und Amplitudenkorrektur.

Bei den korrigierten Wavelet-Koeffizienten der 5. Skala ist der Effekt der Phasenverschiebung gut zu sehen, da hier die ersten Koeffizienten Null gesetzt werden müssen.

Die Kurven der berechneten Krümmungsvarianzen im Bild 3.15 stimmen nicht sehr gut überein. Eine der Berechnungen vorzuziehen ist schwer, da alle mehr oder weniger fehlerbehaftet sind. Ein direkter Vergleich der Wavelet-Glättung mit den anderen Verfahren ist am besten nur mit der aus der geglätteten TWF berechneten Krümmungsvarianz zu vollziehen (E 1.), weil diese verwendet wird, um die Glättung zu realisieren (vgl. Abschnitt 3.4). Die Varianzen nach (E 1.) sind aber für höhere Skalen verfälscht und die Tangentenwinkel werden noch korrigiert, so daß schließlich das Exponentialmodell als Näherung zu benutzen ist. Allerdings ist für alle Varianten ersichtlich, daß es bei einer Glättungssteuerung der Snakes mit der Krümmungsvarianz in den höheren Filterstufen Probleme geben wird. Die zu erreichenden Zielvarianzen sind für diese sehr klein und haben nur geringe Unterschiede in den Beträgen. Vergleichende Untersuchungen sollten daher nur in den unteren Filterstufen vorgenommen werden, da hier der Einfluß von Korrekturen auf die Varianzberechnung noch gering ist.

Es stehen damit drei Kenngrößen zur Verfügung, mit denen ein Vergleich der Glättung von Snakes, Tafus und Wavelets durchgeführt werden kann. Dies sind die Linienlänge, die Skalenenergie und die Krümmungsvarianz. Die Richtungsvarianz wird wegen ihrer Abhängigkeit vom Koordinatensystem vorläufig nicht weiter in Betracht gezogen.

3.4 GLÄTTUNG DER TWF MIT WAVELETS

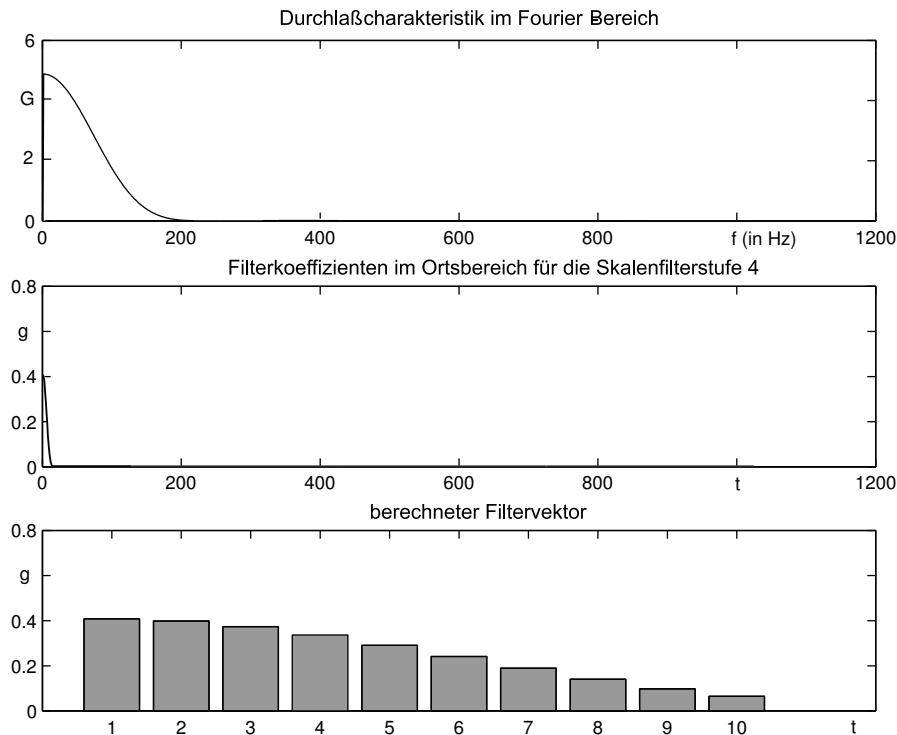


Abbildung 3.17: Filterkoeffizienten der Wavelet-Transformation im Ortsbereich für die 4. Filterstufe.

Die im unteren Bild dargestellten Koeffizienten müssen für die Filterung beidseitig vom ersten Wert angeordnet werden. Der berechnete Filtervektor, der die Durchlaßcharakteristik der 4. Sperrfilterstufe nachbildet, hat demnach 19 Koeffizienten. Der Schwellwert liegt bei $\frac{1}{10}$ des mittleren Koeffizienten (bzw. des ersten im Bild).

3.4 Untersuchungen zur Glättung der Tangentenwinkelfunktion (TWF) mit Wavelets

3.4.1 Korrektur der gefilterten TWF

Da in den vorhergehenden Abschnitten die Glättung der Tangentenwinkelfunktion (TWF) als Ziel der Glättung mit Wavelets besprochen wurde, soll nun getestet werden, inwieweit dieses Verfahren überhaupt Verwendung anwendbar ist.

Bevor jedoch aus der gefilterte TWF eine geglättete Linie berechnet werden kann, sind die verfälschten Randwerte auszutauschen (vgl. 3.3.3 / E 1.). Dies kann auf zwei Wegen erfolgen:

- die verfälschten Winkel sind durch die Originalwerte auszutauschen, oder
- die Randwerte werden mit den Werten der bestapproximierenden Skala - je nach Filterstufe - ersetzt.

Die zweite Variante wird bevorzugt, da im ersten Fall in den höheren Filterstufen die TWF nur noch in der Mitte geglättet ist. In der Abbildung 3.18 ist dies für die siebente Filterstufe⁴ sehr gut zu erkennen.

⁴Die *siebente Filterstufe* bedeutet, daß die Koeffizienten der Skalen eins bis sechs Null gesetzt wurden.

3.4 GLÄTTUNG DER TWF MIT WAVELETS

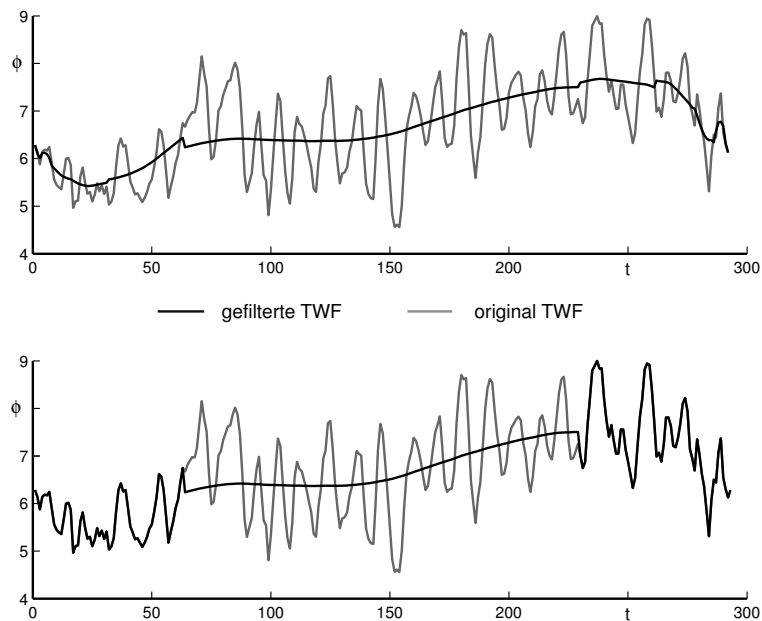


Abbildung 3.18: Korrektur der Signalrandwerte nach Filterung im Wavelet-Bereich.

Oben: Das Ersetzen der Randwerte erfolgt mit Werten aus niederen Filterstufen. *Unten:* Die verfälschten Randwerte werden durch die Originalwerte ausgetauscht.

Das Ersetzen der Randwerte nach der zweiten Möglichkeit erfolgt der Art, daß die äußersten Randwerte aus der ersten Filterstufe entnommen werden und die nachfolgenden aus der zweiten, dann aus der dritten usw., bis die aktuelle Filterstufe erreicht ist. Vorteil dieser Methode ist eine zur Mitte zunehmende Glättung des Signals. Nur die äußersten beiden Randpunkte haben schließlich noch die originalen Werte. Als eine dritte Möglichkeit kann in Betracht gezogen werden, das Eingangssignal der WT so weit an beiden Rändern zu erweitern, daß der Effekt fehlender Koeffizienten für das synthetisierte Signal nicht mehr auftritt. Dann ist allerdings mit anderen Verfälschungen (z. B. durch das Cycling) und einer anderen Filterwirkung auf die Frequenzanteile des Originalsignals zu rechnen.

3.4.2 Rekonstruktion der geglätteten Linie aus der TFW

Nachdem die geglättete TWF am Rand korrigiert wurde, ist die Linie mit Hilfe der Strecken in rechtwinklige Koordinaten (x, y) zurückzutransformieren. Dies wurde in zwei verschiedenen Algorithmen umgesetzt, die im Folgenden beschrieben werden:

- F 1. Im ersten Algorithmus wird die gefilterte TWF direkt benutzt, indem vom ersten Punkt ausgehend die Linie fortlaufend rekonstruiert wird. Dies erfolgt mit dem geglätteten Tangentenwinkel φ_i und den Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_i &= x_{i-1} + s_{i-1} \cdot q \cdot \cos \varphi_{i-1}, \\ y_i &= y_{i-1} + s_{i-1} \cdot q \cdot \sin \varphi_{i-1}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Der Faktor q dient dazu, die Verkürzung der Linie durch Glättung zu berücksichtigen. Er berechnet sich aus dem Verhältnis der *stochastisch geometrischen Approximation der Linienlänge* (vgl.

3.4 GLÄTTUNG DER TWF MIT WAVELETS

Formel (3.32)) vor und nach der Filterung der TWF. Desweiteren müssen die Koordinaten des Anfangspunktes P_1 mit (x_1, y_1) bekannt sein, welche von der ursprünglichen Linie genommen werden können. Die Abbildung 3.19 zeigt im linken Bild eine auf diese Weise rekonstruierte Linie.

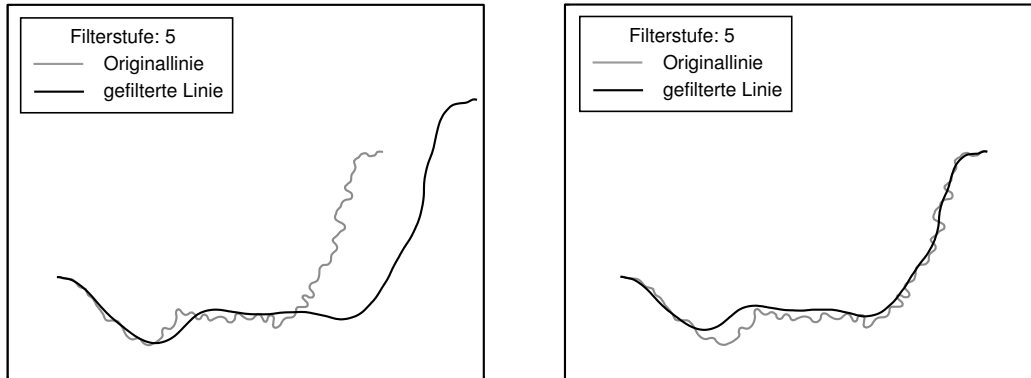


Abbildung 3.19: Direkte Rekonstruktion der Linie aus der geglätteten TWF.

Links: Rekonstruktion der gefilterten Linie. *Rechts:* Rekonstruktion und Anwendung der Drehstreckung auf die geglättete Linie.

Es sind zwei Effekte zu erkennen. Die Linie beginnt nur in einem der ursprünglichen Anfangspunkte und ist gegenüber der ursprünglichen Linie gestreckt. Dies liegt daran, daß die Linie von einem Anfangspunkt beginnend wieder hergestellt wird (im Bild der linke Punkt). Desweiteren schwingt die Linie aus bzw. weicht in ihrer Form von der ursprünglichen Linie ab. Ein zusätzlicher Problempunkt des Verfahrens ist, daß die Linie bei zu starker Glättung einen ganz anderen Verlauf bekommen kann. In der Abbildung 3.20 wurde die TWF einer Linie geglättet, welche starke Änderungen in der Verlaufsrichtung aufweist. Im Ergebnis läßt sich nicht mehr die ursprüngliche Kurvenrichtung aus der geglätteten TWF rekonstruieren.

Eine Beseitigung des ersten Effektes kann durch eine Drehstreckung erfolgen. Dabei wird die geglättete Linie um den Startpunkt P_a mit x_a, y_a gedreht und skaliert, so daß die beiden Endpunkte wieder aufeinander fallen (siehe rechte Grafik von Abb. 3.19). Die Formeln der Drehstreckung lauten:

$$\begin{aligned} x_i &= x_a + m[\sin\alpha \cdot (y_i - y_a) + \cos\alpha \cdot (x_i - x_a)], \\ y_i &= y_a + m[\cos\alpha \cdot (y_i - y_a) + \sin\alpha \cdot (x_i - x_a)]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Der Maßstab m ergibt sich aus dem Verhältnis der Strecken $s(\overline{P_{aa}, P_{ee}})$ und $s(\overline{P_a, P_e})$ zwischen Anfangs- und Endpunkt der beiden Linien. Der Drehwinkel α liegt zwischen den beiden Endpunkten P_{ee} und P_e um den Startpunkt $P_a = P_{aa}$.

Das starke Ausschwingen könnte durch Segmentierung der Linie an den Knickpunkten vermindert werden. Diese Möglichkeit wurde aber nicht im Programm umgesetzt und getestet. Im Bild 3.21 sind noch zwei weitere Beispiele zur Glättung zu sehen, in denen das Ausschwingen erkennbar ist.

F 2. Da bei der vorhergehenden Umsetzung diverse Korrekturen anzubringen sind, wurde nach einer Variante mit besserer Übertragung der Winkeldifferenz zwischen ungefilterter und geglätteter

3.4 GLÄTTUNG DER TWF MIT WAVELETS

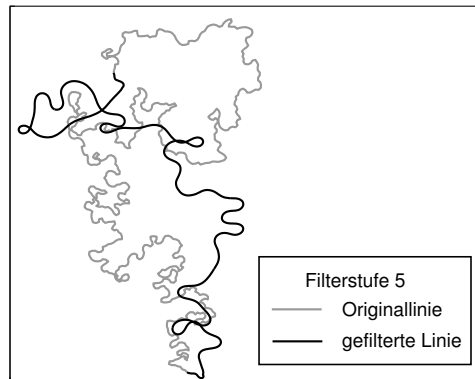


Abbildung 3.20: Fehlerhafte Rekonstruktion einer Linie mit häufigen Richtungswechseln aus der zu extrem geglätteten Tangentenwinkelfunktion.

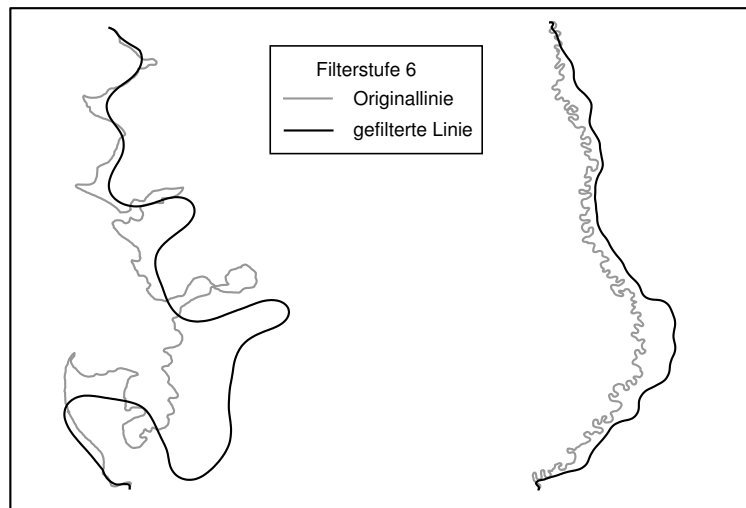


Abbildung 3.21: Zwei Beispiele zur Glättung mit Wavelets.

TWF gesucht. Von [Borkowski et al., 1999] wird vorgeschlagen, die Winkeländerungen $\Delta\varphi$ der TFW durch Verschiebung der Einzelpunkte in den Koordinatenrichtungen umzusetzen. Die Verschiebungsbeträge (dx, dy) ergeben sich mittels Bogenformel oder Vorwärtseinschneiden mit der Restriktion, daß die Verschiebung nur rechtwinklig zur Kurvenrichtung im Punkt erfolgen darf. Die Formeln und eine Abbildung zu beiden Varianten werden im Abschnitt 4.3 geliefert. Eine direkte Umsetzung des Verfahrens, indem man

$$d\varphi = \varphi_{original} - \varphi_{glatt} \quad (3.45)$$

berechnet, scheitert daran, daß die Beträge von $d\varphi$ zu groß sind. Durch die Periodizität des Wertebereiches der TWF ist zum einen die Verschiebung in die falsche Richtung möglich und zum anderen können sich ungünstige Schnittgeometrien ergeben. Dadurch kann die Berechnung der neuen Punktposition unmöglich oder sichtlich falsch werden und würde letztendlich in einer zerstörten Linie resultieren.

Demzufolge ist die Glättung der Linie um den Betrag $d\varphi$ nur in kleinen Verschiebungen (dx, dy) zu realisieren, welche sich aus kleinen iterativen Winkelkorrekturen z. B. $d\varphi_{max} < \frac{\pi}{4}$ ergeben. Bei der Umsetzung im Programm wurde die Winkeldifferenz $d\varphi$ als Zielgröße definiert. Die Punkte

3.4 GLÄTTUNG DER TWF MIT WAVELETS

werden solange um einen kleinen Winkel von ca. fünf Grad verschoben, bis $\varphi_{\text{aktuell}} - \varphi_{\text{glatt}} = 0$ erreicht ist. Dann wird entweder $d\varphi = 0$ gesetzt, oder das Vorzeichen der Verschiebung alterniert (vgl. linke Grafik der Abbildung 3.22).

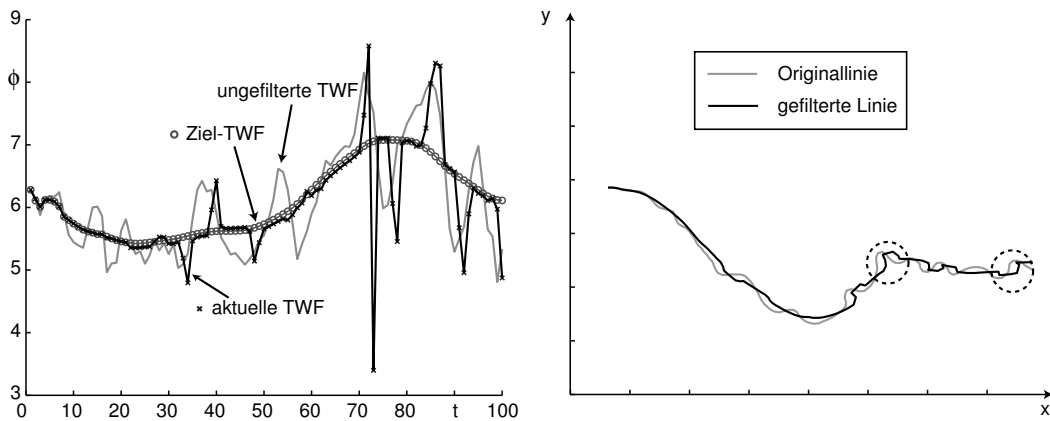


Abbildung 3.22: Rekonstruktion der Linie aus der geglätteten TWF durch iteratives Verschieben von Punkten.

Im linken Bild ist die Annäherung bzw. Abweichung der aktuellen TWF von der Ziel-TWF zu erkennen. Im rechten Bild ist der zum Graphen der TWF zugehörige Linienausschnitt zu sehen, bei dem mit Kreisen die Deformationen der rekonstruierten Linie kenntlich gemacht wurden.

Bei den Untersuchungen stellte sich heraus, daß die gleiche Verschiebung um den Winkel $d\varphi$ nicht die gleiche Veränderung der TWF bewirkt. Desweiteren gab es diverse Problemstellen, an denen die Verschiebung eine Zerstörung der Linie hervorrief. Im linken Bild der Abbildung 3.22 hat sich die TWF zum Teil schon sehr gut an die Ziel-TWF angenähert, an anderen Stellen dagegen eher entfernt. Im rechten Bild ist die Zerstörung der "geglätteten" schwarzen Linie gegenüber der originalen grauen Linie zu sehen. Zum Erhalt einer geglätteten Linie erzielt die Anwendung dieser Variante schlechte Ergebnisse.

Die Untersuchungen zur Rekonstruktion einer geglätteten Linie erbrachten keine zufriedenstellenden Ergebnisse. Aus diesem Grund ist die Wavelet-Glättung mit dem vorgestellten Verfahren nicht zu empfehlen. Der Aufwand zur Realisierung der Transformation und zur Beseitigung der negativen Effekte ist sehr hoch. Es stellt sich die Frage, ob:

- statt der TWF der Linie besser die Koordinatenfunktionen (x, y) geglättet werden sollten, oder
- eine Glättung im Ortsbereich besser geeignet ist, wie sie z. B. durch [Schwarzbach, 1995] vorgenommen wird.

Die Wavelet-Transformation ist ohne Zweifel ein mächtiges Werkzeug für die Analyse und Kompression von Daten. Ihre Komplexität erfordert aber einen gewissen Aufwand zur Einarbeitung in die Methodik und läßt wegen ihrer Vielfältigkeit in der Anwendung (Stichworte: Wahl des Wavelet und Art der Wavelet-Transformation) manchmal nur schwer einen Überblick zu. Dies betrifft vor allem die Kenntnis

3.4 GLÄTTUNG DER TWF MIT WAVELETS

der auftretenden Effekte und deren Ursache. Es ist nicht auszuschließen, daß schon der Ansatz die Tangentenwinkelfunktion mit Wavelets glätten zu wollen, die Schwierigkeit des Unterfangens provoziert. Es werden aber keinesfalls weitere Experimente zur waveletbasierten Glättung der Koordinatenfunktionen ausgeschlossen.

Die Wavelet-Transformation soll in dieser Arbeit zum Vergleich und als Hilfe zur Ermittlung von Steuerparametern der anderen Glättungsverfahren benutzt werden. Die Steuerung und der Vergleich mit der Snakes-Glättung scheint durch die Korrekturen der Tangentenwinkel und der folglich fehlerbehafteten Bestimmung der Krümmungsvarianz ausgeschlossen. Im Gegensatz dazu sind für die Abschätzung der Tafus-Steuerparameter die Durchlaßcharakteristiken der Wavelet-Filterung gegeben. In den folgenden Kapiteln wird die Formvereinfachung mit Snakes und Tafus vorgestellt und getestet.

4 Energieminimierende Verfahren zur Glättung

Energieminimierende Splines werden in der Bildverarbeitung zur Objektextraktion und Mustererkennung verwendet. In diesem Kapitel werden zwei Arten solcher Splines vorgestellt: Snakes und Tafus. Ausgehend vom Energieintegral als zu minimierende Zielfunktion wird die numerische Umsetzung der Spline-Modelle erläutert. Es folgt die Konkretisierung dieses Problems für Snakes und Tafus. Weiterführend wird die Übertragung der beiden Spline-Modelle auf den speziellen Fall der Linienglättung durchgeführt, indem die externe Energie des Energieintegrals definiert wird. Nach Aufstellung der mathematischen Modelle folgt eine Beschreibung der angewendeten Glättungsverfahren. Diese beinhaltet die Ermittlung der Durchlaßcharakteristiken sowie auftretende Defekte und deren Beseitigung.

4.1 Grundprinzip

Häufig weisen Signale bei der Aufzeichnung einen komplizierten Verlauf auf, der durch Meßfehler und andere Einflüsse hervorgerufen wird. Deshalb ist es von Vorteil, wenn der Signalverlauf für die anschließende Auswertung gefiltert und vereinfacht wird. Mit Splines ist es möglich komplizierte, natürliche Signale mit Hilfe einfacher Basisfunktionen zu approximieren. Ersetzt man das Signal durch eine linienbeschreibende Darstellung, so kann eine Linie mit Splines geglättet werden.

Die aktiven bzw. energiminimierenden Splines sollen es ermöglichen eine Linie nicht nur zu glätten, sondern auch der Glättung entgegenwirken zu können. Das bedeutet, daß die Filterung mit aktiven Splines, in der Literatur als Snakes (dt.: Schlange) bezeichnet, ortsabhängig steuerbar ist. Die gegen Verformung widerstandsfähigen Snakes haben ihre Domäne in der Bildverarbeitung und wurden von [Kass et al., 1987] durch eine die Energie beschreibende Zielfunktion eingeführt:

$$E_{Snake} = \int_0^1 (E_{ext} + E_{int}) ds. \quad (4.1)$$

Die Gesamtenergie des aktiven Spline E_{Snake} setzt sich aus einer inneren Energie E_{int} und einer äußeren Energie E_{ext} zusammen und ist abhängig von der Bogenlänge s . Dabei beschreibt die innere Energie meistens die Energie der Schlange selbst und die äußere Energie steuert die Größe der Verformung. Im Bild 4.1 ist zur Veranschaulichung eine ausgleichende Snake-Funktion zu sehen, die zur Approximation einer Meßwertreihe benutzt wird.

Für die Definition der inneren Energie wird angenommen, daß Splines glättende Funktionen sind. Die

4 ENERGIEMINIMIERENDE VERFAHREN

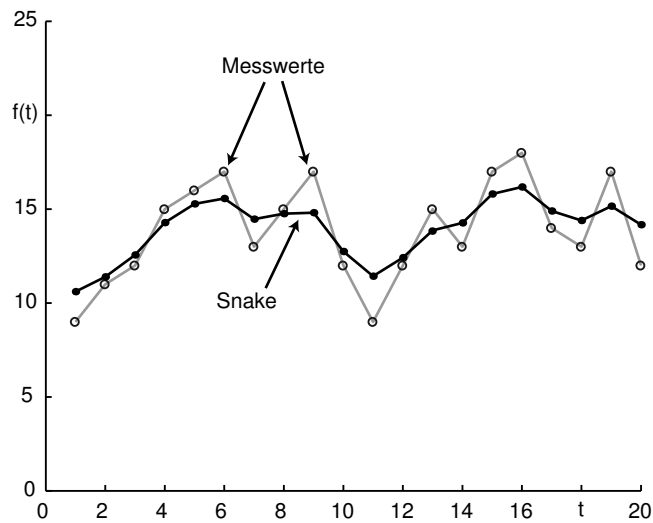


Abbildung 4.1: Meßwertreihe die durch eine Snake-Funktion geglättet wird.

Forderung nach Glattheit des Signals g bzw. der Linie kann nach [Borkowski und Keller, 2002] geometrisch auch so formuliert werden, daß sie nur geringe Anstiege und kleine Krümmungen aufweisen soll:

$$E_{int} = \frac{1}{2}\alpha \cdot \left| \frac{dg}{ds} \right|^2 + \frac{1}{2}\beta \cdot \left| \frac{d^2g}{ds^2} \right|^2. \quad (4.2)$$

Die Parameter α und β gewichten die beiden Terme der “Dehnung“ und “Biegung“ gegeneinander sowie E_{int} gegen E_{ext} . Es ist zu erkennen, daß starke Glättungen, also kleine Anstiege und Krümmungen, eine kleine innere Energie zur Folge haben. Ist das Ziel ein zunehmend glattes Signal, so ist die innere Energie, beeinflusst durch die äußere Energie, zu minimieren:

$$E_{Snake} = \int_0^1 \left(E_{ext} + \frac{\alpha}{2} \left| \frac{dg}{ds} \right|^2 + \frac{\beta}{2} \left| \frac{d^2g}{ds^2} \right|^2 \right) ds \rightarrow Min. \quad (4.3)$$

Mit obiger Gleichung ist das Grundprinzip der Glättung mit Snakes und Tafus definiert worden. Bevor in einem Programm die numerische Lösung der Minimierungsaufgabe erfolgen kann, sind folgende Schritte durchzuführen:

- G 1. Die Minimierung der Gesamtenergie erfolgt durch Verwendung des Variationsverfahrens, indem man die Variation des Funktional (4.3) zum Verschwinden bringt.
- G 2. Aufstellung der dem Variationsproblem äquivalenten Eulergleichungen (Gleichgewichtsbedingungen).
- G 3. Diskretisierung der Eulergleichungen mit *Finiten Differenzen*.
- G 4. Aufstellen eines linearen Ersatzsystems zur numerischen Lösung.

Im nächsten Abschnitt soll nun die Definition des Signals und der Liniendarstellung für Snakes und Tafus erfolgen. Ebenso werden die oben genannten Schritte zur numerischen Umsetzung präzisiert.

4.2 Energieminimierende Splines (Snakes)

Die Snakes als Modell verformbarer Kurven haben ihren Ursprung in der Bildverarbeitung und finden auch als Hilfsmittel der Geodatenverarbeitung ein breites Anwendungsspektrum (vgl. [Meier, 2000]). Durch die Freiheit bei der Definition der äußeren Energie können sie nicht nur beim Erkennungsproblem der Bildverarbeitung, sondern auch zur Approximation von Meßwertreihen oder der kartographischen Verdrängung eingesetzt werden.

Der Einsatz von Snakes für die automatisierte Verdrängung von Linienobjekten in der Karte wurde von [Burghardt, 2001] und [Bader, 2001] erfolgreich getestet und in ein kartographisches Produktionssystem integriert. Anschließend an diese Arbeiten soll der Einsatz von Snakes als Glättungsalgorithmus für die Generalisierung von Linienobjekten verwendet werden.

Eine Linie wird für das Snakes-Modell in ihrer Parameterdarstellung

$$v(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

benötigt. Die beiden Koordinatenfunktionen werden getrennt betrachtet und der zu glättenden Funktion g gleichgesetzt:

$$g := v \quad \text{bzw.} \quad g := x(t) \quad \text{und} \quad g := y(t). \quad (4.5)$$

Wird der Parameter t durch die Bogenlänge s ersetzt, ergibt sich die Gesamtenergie der Linie im Snakes-Modell zu:

$$I[x(s), y(s)] := \int_0^1 (E_{ext} + E_{int}) ds = \int_0^1 \left(E_{ext} + \frac{\alpha}{2} \left| \frac{dv}{ds} \right|^2 + \frac{\beta}{2} \left| \frac{d^2v}{ds^2} \right|^2 \right) ds. \quad (4.6)$$

Um diese Gleichung numerisch umzusetzen, geht man nach den Schritten aus Abschnitt 4.1 vor.

$G_S 1.$ Das Funktional (4.6) wird für beide Koordinaten variiert:

$$\delta I[x + \delta x, y] = 0 \quad , \quad \delta I[x, y + \delta y] = 0. \quad (4.7)$$

$G_S 2.$ Mit den festen Randwerten $x(0) = x_a, y(0) = y_a, x(1) = x_e, y(1) = y_e$ kann die Herleitung der äquivalenten Eulerschen Gleichungen erfolgen (siehe [Burghardt, 2001] und [Bader, 2001]). Die sich ergebenden Differentialgleichungen sind von 4. Ordnung, beinhalten also die 4. Ableitung der Koordinaten x, y nach der Bogenlänge s :

$$E_x - \frac{dE_{x_s}}{ds} + \frac{d^2E_{x_{ss}}}{ds^2} = 0 \quad \text{und} \quad E_y - \frac{dE_{y_s}}{ds} + \frac{d^2E_{y_{ss}}}{ds^2} = 0. \quad (4.8)$$

Mit dem eingesetzten inneren und äußeren Potential ergibt sich:

$$\frac{\partial E_{ext}}{\partial x} - \alpha x_{ss} + \beta x_{ssss} = 0 \quad \text{sowie:} \quad \frac{\partial E_{ext}}{\partial y} - \alpha y_{ss} + \beta y_{ssss} = 0. \quad (4.9)$$

Statt der Variation des Funktionals (4.6), die einer Minimierung der gesamten Energie der Linie in einem Iterationsschritt entspricht, besteht auch die Möglichkeit den *Greedy Algorithmus* anzuwenden. Dieser von [Williams und Shaw, 1990] eingeführte Algorithmus versucht alternativ,

4.2 ENERGIEMINIMIERENDE SPLINES (SNAKES)

die Gesamtenergie der Snakes-Funktion zu minimieren, indem die Energie jeder einzelnen Stützstelle durch kleine Verschiebungen verringert wird. Nach [Burghardt, 2001] ist für die Linienverdrängung die Lösung mit dem Variationsverfahren vorzuziehen. Deswegen soll dieses auch für die Linienglättung verwendet werden.

$G_5 3$. Es folgt die Diskretisierung der Eulergleichungen mit *Finiten Differenzen (FD)*. Auch hier gibt es eine alternative Variante, nämlich die Diskretisierung mit *Finiten Elementen (FE)*. Sowohl [Burghardt, 2001] als auch [Bader, 2001] stellen fest, daß zwischen den Realisierungen mit FD und mit FE kaum Unterschiede beim Einsatz für die Linienverdrängung zu erkennen sind. Dem wird hinzugefügt, daß bei der Generalisierung bzw. Linienglättung die höhere Berechnungsgenauigkeit der FE-Methode nicht nötig ist, weil gerade eine manuelle Generalisierung durch verschiedene Kartographen keine identischen Ergebnisse erbringen würde.

Das Ergebnis der Diskretisierung mit finiten Differenzen für die x -Koordinate mit:

$$x_{ss} \rightarrow x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}, \quad (4.10)$$

$$x_{ssss} \rightarrow x_{i-2} - 4x_{i-1} + 6x_i - 4x_{i+1} + x_{i+2}, \quad (4.11)$$

eingesetzt in Gleichung (4.9) ist:

$$\frac{\partial E_{ext}}{\partial x} - \alpha(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}) + \beta(x_{i-2} - 4x_{i-1} + 6x_i - 4x_{i+1} + x_{i+2}) = 0. \quad (4.12)$$

Damit ergeben sich zwei Gleichungssysteme der Art:

$$\mathbf{A}_P \mathbf{x}^t + \mathbf{E}_x^{ext}(\mathbf{x}^t, \mathbf{y}^t) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_P \mathbf{y}^t + \mathbf{E}_y^{ext}(\mathbf{x}^t, \mathbf{y}^t) = \mathbf{0}. \quad (4.13)$$

\mathbf{A}_P stellt dabei eine pentadiagonale Matrix dar, welche aus Sicht der Filterung auch als gewichtetes Fünfpunktmittel der Koordinaten x und y betrachtet werden kann. Sie hat folgende Struktur:

$$\mathbf{A}_P = \begin{bmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b & a & b & c & 0 & 0 & \\ c & b & a & b & c & 0 & \\ 0 & c & b & a & b & c & \\ 0 & 0 & c & b & a & b & \\ \vdots & & & & & & \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

mit den Koeffizienten:

$$a := 2\alpha + 6\beta, \quad b := -\alpha - 4\beta \quad \text{und} \quad c := \beta. \quad (4.15)$$

$G_5 4$. Da die Matrix \mathbf{A}_P in der Regel schlecht konditioniert ist oder gar singular sein kann, ist das System, unter der Annahme der Konvergenz, iterativ nach geeigneter Regularisierung zu lösen.

Die Regularisierung für das erste System aus (4.13) erfolgt mit $\lambda \mathbf{I}_x$ zu:

$$\lambda \mathbf{I}_x + \mathbf{A}_P \mathbf{x} = \lambda \mathbf{I}_x + (-\mathbf{b}_x) \quad (4.16)$$

mit der Einheitsmatrix \mathbf{I} und der Inhomogenität $\mathbf{b}_x = \mathbf{E}_x^{ext}(x^t, y^t)$. Der Parameter λ ist ein Konvergenzfaktor und sollte um den Wert Eins liegen.

Wird $\lambda\mathbf{I} + \mathbf{A}_P =: \mathbf{G}$ gesetzt und eine iterative Lösung eingeführt, so ergibt sich:

$$\mathbf{G}\mathbf{x}^t = \lambda\mathbf{I}\mathbf{x}^{t-1} + (-\mathbf{b}_x^{t-1}), \quad (4.17)$$

und umgestellt nach der gesuchten geglätteten Koordinate:

$$\mathbf{x}^t = \mathbf{G}^{-1}(\lambda\mathbf{I}\mathbf{x}^{t-1} - \mathbf{b}_x^{t-1}). \quad (4.18)$$

Für die andere Koordinate folgt äquivalent:

$$\mathbf{y}^t = \mathbf{G}^{-1}(\lambda\mathbf{I}\mathbf{y}^{t-1} - \mathbf{b}_y^{t-1}). \quad (4.19)$$

4.3 Tangent-Angle-Function-Snakes (Tafus)

Wie im vorigen Abschnitt beschrieben, erfolgt die Berechnung der Snakes mit einer pentadiagonalen Matrix \mathbf{A}_P , welche trotz Regularisierung eine schlechte Kondition besitzt. Die Lösung des Gleichungssystem konvergiert für die Verdrängung nur langsam. Diverse Modifikationen wie die Diskretisierung mit *Finiten Elementen*, die Benutzung von *Basis Splines* oder die *Optimierung der freien Parameter* wurden von [Borkowski et al., 1999] getestet, um die Berechnung der Lösung zu beschleunigen. Bei diesen konnte jedoch keine signifikante Verbesserung für Linienobjekte festgestellt werden. Im Ergebnis der Untersuchungen wurde überlegt, daß eine einfachere, z. B. tridiagonale, Matrix \mathbf{A} eine Beschleunigung bei der Lösung erbringen könnte. Dahingehend muß eine andere Linienrepräsentation für Snakes eingeführt werden und statt 4. Differenzen dürfen nur noch 2. Differenzen im Gleichungssystem enthalten sein.

Eine Liniendarstellung, die dies erfüllt ist die Tangentenwinkelfunktion (TFW):

$$\varphi(s) := \arctan \frac{\dot{y}(s)}{\dot{x}(s)}. \quad (4.20)$$

Da dieses Snakes-Modell auf der TFW basiert, wird es auch mit Tangent-Angle-Function-Snakes (Tafus)-Modell bezeichnet.

Die innere Energie nimmt nach Einführung der TFW in Gleichung (4.2) die folgende Gestalt an:

$$E_{int} = \frac{1}{2} \alpha \varphi^2 + \frac{1}{2} \beta \dot{\varphi}^2. \quad (4.21)$$

Die Krümmung $\dot{\varphi}$ der Kurve, vorher durch die zweite Ableitung der Koordinatenfunktion nach der Bogenlänge s repräsentiert, ergibt sich aus:

$$\dot{\varphi} = x\ddot{y} - y\ddot{x} \quad \text{bzw. für eine diskrete TFW:} \quad \dot{\varphi}_t = \varphi_t - \varphi_{t-1}. \quad (4.22)$$

Die Rücktransformation in rechtwinklig kartesische Koordinaten erfolgt, wie bereits in Kapitel 2.2 angegeben, mit:

$$\begin{aligned} x(s) &= x(s_0) + \int_0^s \cos \varphi(t) dt, \\ y(s) &= y(s_0) + \int_0^s \sin \varphi(t) dt. \end{aligned} \quad (4.23)$$

4.3 ENERGIEMINIMIERENDE TAFUS

Da jetzt die zu minimierende Zielfunktion

$$I[\varphi(s)] := \int_0^1 (E_{ext} + \frac{1}{2} \alpha \varphi^2 + \frac{1}{2} \beta \dot{\varphi}^2) ds \quad (4.24)$$

gegeben ist, können wieder die Schritte aus Abschnitt 4.1 zur numerischen Realisierung angegeben werden.

G_T 1. Das Funktional (4.24) wird variiert.

$$\delta I[\varphi + \delta\varphi] := 0. \quad (4.25)$$

G_T 2. Es folgt nach Festsetzung der Randwerte $\varphi(0) = \varphi_a$ und $\varphi(1) = \varphi_e$ die Aufstellung der dem Variationsproblem äquivalenten Eulergleichung. Nach [Bronstein und Semendjajew, 1981] ist für eine Funktion I in der nur φ und $\dot{\varphi}$ vorkommen:

$$\left[\frac{\partial I}{\partial \varphi} - \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial I}{\partial \dot{\varphi}} \right) \right] \dot{\varphi} = 0. \quad (4.26)$$

Da $\dot{\varphi} \neq 0$ ist, wird der Ausdruck in der Klammer Null gesetzt und es folgt mit:

$$\frac{\partial I}{\partial \varphi} = \frac{\partial E_{ext}}{\partial \varphi} + \alpha \varphi \quad \text{und} \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial I}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \beta \dot{\varphi},$$

die Eulergleichung:

$$\frac{\partial E_{ext}}{\partial \varphi} + \alpha \varphi(s) - \beta \ddot{\varphi}(s) = 0. \quad (4.27)$$

Wie gewünscht und auch zu erkennen, ist die entstandene Differentialgleichung nur noch von zweiter Ordnung. Es kommen als nur noch zweite Differenzen bei der Diskretisierung vor. Allerdings ist auch ersichtlich, daß es nur Änderungen der TWF φ gibt und keine Änderungen der Bogenlänge s . Das bedeutet, daß die Lösung nicht eindeutig ist und eine zusätzliche Bedingung eingeführt werden muß. Die Bedingung soll sein, daß sich ein Punkt nur orthogonal zur Tangentenrichtung der Kurve im Punkt verschieben läßt. Weiter unten wird dies noch einmal ausgeführt.

G_T 3. Die Diskretisierung der Eulergleichung mit *Finiten Differenzen*:

$$\varphi \rightarrow \varphi_i, \quad (4.28)$$

$$\ddot{\varphi} \rightarrow \varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}, \quad (4.29)$$

führt auf ein Gleichungssystem der Art:

$$\mathbf{A}_T \boldsymbol{\varphi} + \mathbf{E}_{\varphi}^{ext}(\varphi, s) = \mathbf{0}, \quad (4.30)$$

mit der tridiagonalen Matrix \mathbf{A}_T , die wie folgt aussieht:

$$\mathbf{A}_T = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b & a & b & 0 & 0 & \\ 0 & b & a & b & 0 & \\ 0 & 0 & b & a & b & \\ 0 & 0 & 0 & b & a & \\ \vdots & & & & & \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

4.3 ENERGIEMINIMIERENDE TAFUS

Deren Koeffizienten berechnen sich zu:

$$a := \alpha + 2\beta \quad \text{und} \quad b := -\beta. \quad (4.32)$$

G_T 4. Die Notwendigkeit einer Regularisierung des Gleichungssystems (4.30) ist nicht unbedingt gegeben, da die Matrix \mathbf{A}_T in der Regel eine annehmbare Kondition im Vergleich zu \mathbf{A}_P besitzt. Sie ist aber dann nötig, wenn die Parameter α und β nicht als Konstanten betrachtet werden, wie dies im späteren Verlauf der Arbeit erfolgt.

Deswegen wird das System ebenfalls mit $\lambda \mathbf{I} \varphi$ regularisiert und es ergibt sich:

$$\lambda \mathbf{I} \varphi + \mathbf{A}_T \varphi = \lambda \mathbf{I} \varphi + (-\mathbf{b}_\varphi), \quad (4.33)$$

beziehungsweise:

$$\mathbf{G} \varphi = \lambda \mathbf{I} \varphi + (-\mathbf{b}_\varphi), \quad (4.34)$$

mit den Substitutionen:

$$\mathbf{G} := \lambda \mathbf{I} + \mathbf{A}_T \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_\varphi = \mathbf{E}_\varphi^{ext}(\varphi, s).$$

Unter der Annahme der Konvergenz der Lösung kann das System iterativ gelöst werden mit:

$$\varphi^t = \mathbf{G}^{-1}(\lambda \mathbf{I} \varphi^{t-1} - \mathbf{b}_\varphi^{t-1}). \quad (4.35)$$

In [Borkowski und Meier, 1999] wird alternativ zur obigen Iterationsmethode die folgende Vorschrift vorgeschlagen:

$$\varphi^t = \varphi^{t-1} - \mathbf{G}^{-1} \mathbf{b}_\varphi^{t-1}. \quad (4.36)$$

Beide Ansätze erfüllen das zu lösende Gleichungssystem unter den gleichen Voraussetzungen. Allerdings ist die Signalwertdifferenz zwischen zwei Iterationsschritten aus Gleichung (4.35) größer als die mit der Formel (4.36). Die Ursache dafür ist, daß nicht mehr die Signalwerte der Tangentenwinkelfunktion geglättet werden, sondern die Änderungen der externen Energie. Da in der späteren Umsetzung im Programm die Iterationsvorschrift (4.36) benutzt wird, bedeutet dies, daß sich der Lösung langsamer genähert wird.

Um die Rückrechnung von der TWF in rechtwinklige Koordinaten vornehmen zu können, ist das Gleichungssystem (4.36) nach der Winkeländerung $d\varphi$ umzustellen:

$$d\varphi^t = \mathbf{G}^{-1} \mathbf{b}_\varphi^{t-1}. \quad (4.37)$$

$d\varphi$ stellt den Winkel dar, um den der Punkt P in der Abbildung 4.2 in seine neue Lage \tilde{P}_1 bzw. \tilde{P}_2 verschoben wird.

In (G_T 2.) wurde von der Einführung einer **Zusatzbedingung** gesprochen, um Eindeutigkeit für die Rücktransformation zu erlangen. Diese läßt eine Verschiebung der Punkte nur orthogonal zur Tangentenwinkelrichtung zu. Die Umsetzung kann in zwei Varianten erfolgen. Für kleine Winkeländerungen

4.3 ENERGIEMINIMIERENDE TAFUS

$d\varphi_i$ ist die Berechnung der Querverschiebung dq mit der **Bogenformel** über den Punktabstand s_i vom vorhergehenden Punkt aus möglich:

$$dq_i = d\varphi_i s_i \quad \text{mit:} \quad s_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}. \quad (4.38)$$

Die neuen Koordinaten berechnen sich dann aus den alten und den addierten Koordinatenverschiebungen:

$$dx_i \simeq dq_i \cos\left(\varphi_i + \frac{\pi}{2}\right), \quad (4.39)$$

$$dy_i \simeq dq_i \sin\left(\varphi_i + \frac{\pi}{2}\right). \quad (4.40)$$

Eine zweite Möglichkeit ist die Berechnung des neuen Punktes durch *Vorwärtseinschneiden* vom vorhergehenden Punkt und vom Altpunkt aus. Die Berechnung der Koordinatendifferenzen dx und dy erfolgt mit den Formeln:

$$dx_i = \frac{y_i - y_{i-1} + (x_i - x_{i-1}) \tan t_{i-1}}{\tan t_{i-1} - \tan t_i}, \quad (4.41)$$

$$dy_i = dx_i \tan t_i, \quad (4.42)$$

$$t_{i-1} = \varphi_{i-1} + d\varphi_{i-1,i}, \quad (4.43)$$

$$t_i = \begin{cases} \frac{1}{2}(\pi + \varphi_{i-1} + \varphi_i) & : \text{ falls } d\varphi > 0 \\ \frac{1}{2}(3\pi + \varphi_{i-1} + \varphi_i) & : \text{ falls } d\varphi < 0 \end{cases} \quad (4.44)$$

Ein Veranschaulichung beider Varianten zur Rückrechnung der TWF bietet das Bild 4.2.

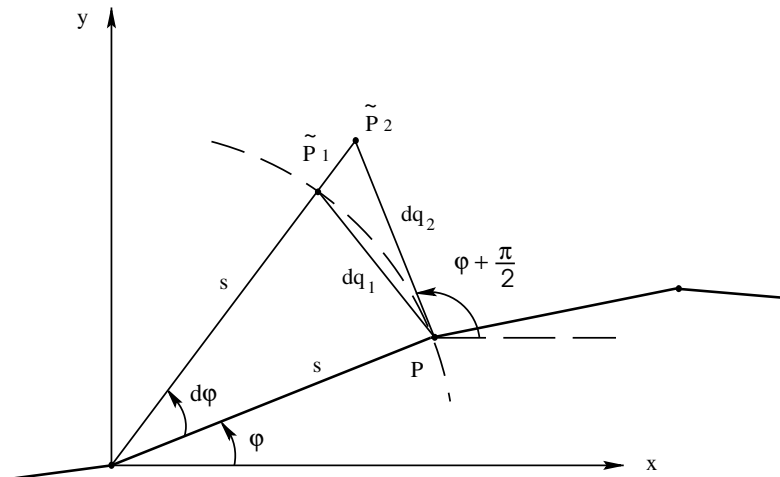


Abbildung 4.2: Berechnung des um $d\varphi$ verschobenen Punktes P mit der Bogenformel (\tilde{P}_1) oder durch Vorwärtseinschneiden senkrecht zur Kurvenrichtung (\tilde{P}_2)

Der Vorteil der Tafus besteht nicht nur in der tridiagonalen Matrix \mathbf{A}_T , welche besser konditioniert ist, sondern auch darin, daß nur *ein* Gleichungssystem gelöst werden muß, statt zwei wie beim Snakes-Modell. Nachteilig ist allerdings die zusätzliche Transformation in die Tangentenwinkeldarstellung und zurück. Bei der heutigen Leistungsfähigkeit von Computern fallen diese zusätzlichen Rechnungen jedoch kaum ins Gewicht. Dagegen kann die Invertierung großer Matrizen als rechenintensiver Vorgang betrachtet werden.

4.4 Glättung mit Snakes

4.4.1 Ansatz der externen Energie

Erste Versuche zur Linienglättung mit Snakes wurden bereits von [Burghardt, 2002b] durchgeführt und dokumentiert. Die kontextabhängige äußere Energie wurde als Konstante angenommen. Damit verschwindet die Inhomogenität des Gleichungssystems (4.17):

$$\mathbf{b}_x = \mathbf{E}_x^{ext}(x^t, y^t) = \frac{\partial E_{ext}}{\partial x} = \frac{\partial Const}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (4.45)$$

und analog:

$$\mathbf{b}_y = \mathbf{0}. \quad (4.46)$$

Die numerisch zu realisierenden Gleichungssysteme sind somit:

$$\mathbf{G}\mathbf{x}^t = \lambda\mathbf{I}\mathbf{x}^{t-1} + \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{G}\mathbf{y}^t = \lambda\mathbf{I}\mathbf{y}^{t-1} + \mathbf{0}. \quad (4.47)$$

Beziehungsweise nach der gesuchten Größe umgestellt:

$$\mathbf{x}^t = \mathbf{G}^{-1}\lambda\mathbf{x}^{t-1} \quad \text{und} \quad \mathbf{y}^t = \mathbf{G}^{-1}\lambda\mathbf{y}^{t-1}. \quad (4.48)$$

Infolge der Aussage, daß $\mathbf{b}_x = \mathbf{0}$ ist, ist anzumerken:

Nimmt man das ursprüngliche Gleichungssystem aus Gleichung (4.10) und setzt (4.45) darin ein, so ergibt sich:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0}. \quad (4.49)$$

Die offensichtliche Lösung ist $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Unterstellen wir die Konvergenz des iterativen Lösungsverfahrens von Gleichung (4.10), dann würde dies bedeuten, daß sich der Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ in kleinen Schritten annähert wird. Dies ist mathematisch gesehen vielleicht nicht nachvollziehbar, erfüllt aus praktischer Sicht aber seinen Zweck, da das Ziel der Linienglättung erreicht wird.

Beim Ansatz einer konstanter externer Energie ist die rechte Seite der Differentialgleichung gleich Null, und es läßt sich für die Filterung analytisch keine Durchlaßcharakteristik nach der Vorschrift für stationäre Signale aus dem Lehrbuch [Meier und Keller, 1990] berechnen. Wäre dies möglich, so könnten schon vor der Anwendung Aussagen zum Glättungsverhalten und damit auch zur Steuerung der Parameter α und β gemacht werden. Desweiteren ließen sich die Ergebnisse der aufgeführten Glättungsverfahren besser miteinander vergleichen. Sollte es aber nötig sein, eine Durchlaßcharakteristik anzugeben, so ist dies zwar nicht allgemein, jedoch für ein spezielles Signal möglich, indem man das fouriertransformierte Signal vor und nach der Glättung vergleicht.

4.4.2 Snakes - Implementierung, Defekte und Verbesserungen

Der genannte Snakes-Ansatz wurde in einem MATLAB- Programm umgesetzt und die Eignung für die Linienglättung untersucht. Die Hauptsteuerparameter, um die Stärke des zu erzielenden Glättungseffektes zu bestimmen, sind die Größen α und β der inneren Energie (vgl. Gleichung (4.6)). Um eine Vorstellung davon zu bekommen, wie diese gewählt werden müssen, um starke oder schwache Glättungen

4.4.2 SNAKES IMPLEMENTIERUNG

zu erreichen, kann nach [Meier und Keller, 1990] für ein stationäres Signal die Durchlaßcharakteristik (D-Char.) berechnet werden. Da - wie oben erwähnt - dies für $E_{ext} = const$ nicht möglich ist, wird vergleichend $E_{ext} = \frac{1}{2}(x_0 - x)^2$ angesetzt. Es ergibt sich mit

$$\frac{\partial E_{ext}}{\partial x} = x - x_0, \quad (4.50)$$

die Differentialgleichung zu:

$$x - \alpha x'' + \beta x^{IV} = x_0. \quad (4.51)$$

Der Ansatz für die Durchlaßcharakteristik G lautet:

$$|G(j\omega)|^2 = \frac{|P_m(j\omega)|^2}{|Q_n(j\omega)|^2}. \quad (4.52)$$

Setzt man: $(j\omega)^n = x^{(n)}$ und $P_m = x_0$ mit $m = 0$ sowie die Terme der linken Seite gleich Q_n , dann erhält man die folgende D-Char.:

$$|G(j\omega)|^2 = \frac{1^2}{(1 - \alpha(j\omega)^2 + \beta(j\omega)^4)^2} \quad (4.53)$$

bzw.:

$$G(\omega) = \frac{1}{1 + \alpha\omega^2 + \beta\omega^4}. \quad (4.54)$$

Diese D-Char. entspricht der eines Tiefpaßfilters. Dabei führen große Parameter α und β zu einer starken Dämpfung hoher und mittlerer Frequenzen, wie dies in Abbildung 4.3 ersichtlich ist.

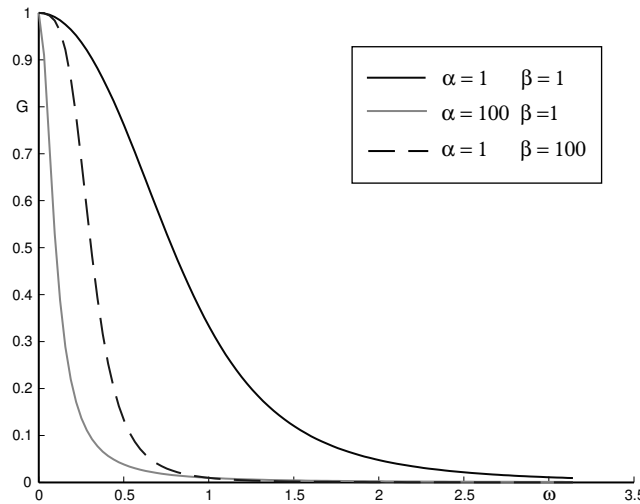


Abbildung 4.3: Durchlaßcharakteristik einer Snakes-Filterung mit $E_{ext} = \frac{1}{2}(x_0 - x)^2$.

Die Filtercharakteristik entspricht der eines Tiefpaßfilters. Zu sehen sind Filterkurven für verschiedene Kombinationen der Steuerparameter.

Tests haben gezeigt, daß die Wirkung der Parameter im Snakes-Modell mit $E_{ext} = const$ dem eben berechneten Modell vergleichbar ist. So erzielen kleine Parameter $\alpha = \beta \approx 1$ eine schwache Glättung und große Werte $\alpha = \beta \approx 100$ eine starke Glättung.

4.4.2 SNAKES IMPLEMENTIERUNG

Nach Durchführung der Experimente können zwei Aussagen getroffen werden:

- Es kann mit den Snakes in nur *einem* Iterationsschritt eine fast beliebig starke Glättung einer Linie erreicht werden, wenn die Parameter entsprechend große Beträge erhalten.
- Besteht der Wunsch einer starken Glättung, so sind große β großen Werten von α vorzuziehen, da sich eine bessere Beibehaltung der Kurvenform einstellt. Dies ist mit einer lokal wirkenden Glättung bei starker Wichtung des Krümmungstermes zu erklären. Im Gegensatz dazu verursacht eine starke Gewichtung des Neigungstermes (z. B. $\alpha = 100$) eine Wirkung auf die “globale“ Richtung der Linie.

Die bei den Untersuchungen festgestellten Defekte werden in den folgenden Unterabschnitten beschrieben und Lösungen zur Beseitigung vorgestellt.

Maßstabstreue Filterung

Die Snakes-Filtermatrix \mathbf{A}_P ist in der Regel sehr schlecht konditioniert. Die Kondition einer Matrix sagt aus, wie stark sich Fehler bzw. Änderungen in Daten auf die Berechnung der Lösung des Gleichungssystems auswirken. Für iterative Lösungsverfahren ist die spektrale Konditionszahl einer Matrix am aussagekräftigsten. Sie berechnet sich mit der Formel:

$$\text{cond}(A) = \frac{\max|\lambda_i|}{\min|\lambda_i|}, \quad (4.55)$$

aus dem größten und kleinsten Eigenwert λ_i der Matrix.

Ist die Konditionszahl einer Filtermatrix im optimalen Fall gleich Eins, so ist diese gut konditioniert und alle Eingabewerte haben den gleichen Einfluß auf die Lösung des Gleichungssystems. Große Konditionswerte weisen auf große Veränderungen der Lösung bei kleinen Änderungen der Eingabedaten hin. Benutzt man ein iteratives Lösungsverfahren mit schlecht konditionierter Matrix, dann werden viele Iterationen für eine hinreichend genaue Lösung benötigt, oder das Verfahren konvergiert überhaupt nicht. Singuläre Matrizen haben eine unendliche Kondition bzw. numerisch unendliche Kondition. Ist eine Matrix singular, so ist das System nicht eindeutig lösbar und die Matrix nicht invertierbar. In der Abbildung 4.4 ist die Auswirkung schlecht konditionierter Gleichungssysteme auf die Berechnung der (geglätteten) Lösung dargestellt.

Zur Vermeidung einer schlechten Kondition oder gar numerischen Singularität der Matrix ist eine Regularisierung nötig. Dies geschieht in der Regel durch Addition einer Größe λ zu den Elementen der Hauptdiagonale, entsprechend dem Ausdruck:

$$\mathbf{G} := \lambda \mathbf{I} + \mathbf{A}.$$

Der Wert des Konvergenzfaktors λ sollte um Eins liegen.

Wird die Regularisierung vom Standpunkt der Filterung aus betrachtet, ergeben sich die folgenden Überlegungen:

4.4.2 SNAKES IMPLEMENTIERUNG

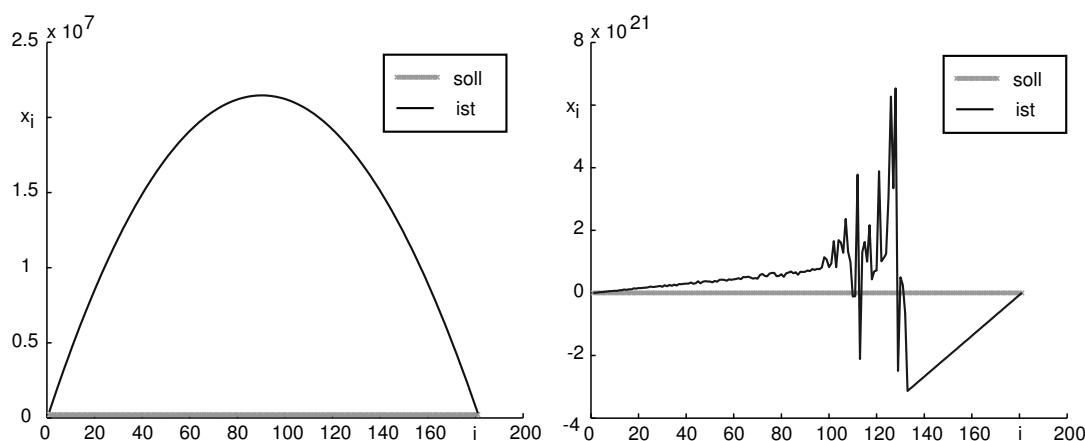


Abbildung 4.4: Lösungen schlecht konditionierter Matrizen.

In der linken Grafik ist der Lösungsvektor für eine schlecht konditioniert Matrix zu sehen ($\text{cond}(A) = 1 \cdot 10^4$). Rechts ist der Ergebnisvektor für eine Berechnung mit singulärer Matrix abgebildet.

Bei der Lösung des Snakes-Systems $\mathbf{A}_P \mathbf{x} = \mathbf{b}$ entspricht die Matrix \mathbf{A}_P einem Filteroperator. Ein Wert des Vektors \mathbf{b} berechnet sich als gewichtetes Mittel aus fünf Werten der Größe \mathbf{x} . Die fünf Filterkoeffizienten sind die Elemente einer Zeile i der Matrix \mathbf{A}_P :

$$\mathbf{A}_i^P = \left| 0 \dots 0 \quad c \quad b \quad a \quad b \quad c \quad 0 \dots 0 \right|,$$

mit:

$$a := 2\alpha + \beta, \quad b := -\alpha - 4\beta \quad \text{und:} \quad c := \beta.$$

Eine Filterung ist bei diskreten Rechnungen *maßstabstreu*, wenn die Summe aller Gewichtskoeffizienten des Filters gleich Eins ist. Dies würde übertragen auf ein 1d-Signal bedeuten, daß die Fläche unter der Kurve vor und nach der Filterung gleich groß ist.

Werden die Gewichtskoeffizienten bzw. die Elemente eine Zeile der Matrix aufsummiert, dann ergibt sich:

$$\sum_{j=1}^n c_{i,j} = 2c_i + 2b_i + a_i = 0\alpha + 0\beta = 0. \quad (4.56)$$

Die Summe Null ist so zu interpretieren, daß die Filterung ein unbrauchbares Ergebnis liefert. Für die regularisierte Matrixzeile berechnet sich hingegen:

$$\sum_{j=1}^n c_{i,j} = 2c_i + 2b_i + (a_i + \lambda) = 0\alpha + 0\beta + \lambda = \lambda. \quad (4.57)$$

Wird, wie für die Regularisierung empfohlen, $\lambda = 1$ gesetzt, dann erhält man eine maßstabstreu Filterung.

Das Ziel der Filterung mit Snakes ist nicht die Berechnung des Vektors \mathbf{b} , sondern die Suche nach der Größe \mathbf{x} . Die Matrix \mathbf{A}_P wird deswegen im Gleichungssystem der Snakes invertiert, um die Lösung aus dem vorhergehenden Vektor \mathbf{x}^{t-1} und \mathbf{b}^{t-1} zu erhalten (vgl. Gleichung (4.18)). Mit der invertierten Matrix \mathbf{A}_P^{-1} bzw. \mathbf{G}_P^{-1} wird zwar kein Fünfpunktmittel mehr berechnet, aber für eine Regularisierung mit

4.4.2 SNAKES IMPLEMENTIERUNG

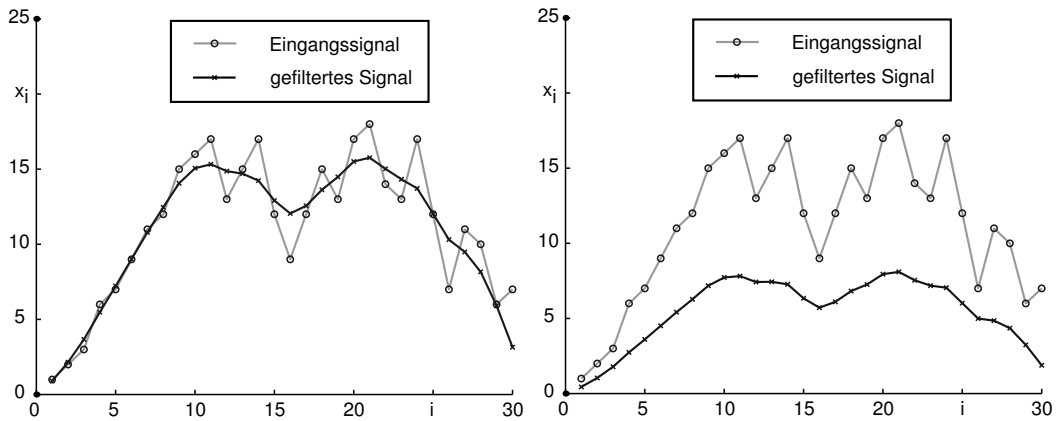


Abbildung 4.5: Maßstabstreue Filterung.

Im linken Bild erfolgte eine maßstabstreue Snakes-Filterung mit dem Regularisierungsparameter $\lambda = 1$. Im rechten Bild ist das Ergebnis einer nicht maßstabstreuen Snakes-Filterung mit $\lambda = 2$ zu sehen.

$\lambda = 1$ ist die Zeilensumme nach der Invertierung immer noch gleich Eins und die Filterung damit ebenfalls maßstabstreu.

Bewirken die Snakes- und die Tafus-Algorithmen eine maßstabstreue Filterung, dann haben die Ergebniswerte die gleiche Größenordnung wie die Eingangswerte. Übertragen auf die Linienglättung bedeutet dies, die annähernd gleiche Lage und auch Richtung der Linie beizubehalten. In der Abbildung 4.5 ist der Unterschied zwischen maßstabstreuere Filterung und nicht maßstabstreuere Filterung veranschaulicht. Es ist zu erkennen, daß sich die gefilterte Kurve in Richtung der Abszisse verschiebt und dadurch die Fläche unter der Kurve kleiner wird.

Bei der Filterung mit Snakes werden die zwei Randpunkte des Signals anders gefiltert als die restlichen Punkte. Dies ist für eine konstante Testfunktion in Bild 4.6 ersichtlich. Werden für die ersten beiden Zeilen der Matrix \mathbf{A}_P die Koeffizienten aufsummiert, dann erkennt man eine Maßstabsänderung als Ursache des Effekts:

$$\mathbf{A}_P = \begin{bmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b & a & b & c & 0 & 0 & \\ c & b & a & b & c & 0 & \\ \vdots & & & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - 2\beta + \lambda \\ -6\beta + \lambda \\ 0 + \lambda \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Damit die Filterung der Randpunkte gleichfalls maßstabstreu ist, wird die Matrix Zeile für Zeile skaliert und nicht global regularisiert. Das geschieht durch Multiplikation der Zeilenelemente mit der reziproken Summe selbiger:

$$\mathbf{C}_i^P = \frac{1}{\sum_{j=1}^n A_{i,j}^P} \mathbf{A}_i^P. \quad (4.58)$$

Der Vorteil dieser Methode liegt in der ebenfalls möglichen Verwendung mit variablen Koeffizientenmatrizen. Im bisher vorgestellten Snakes-Algorithmus sind die Parameter α und β konstant und damit auch die Matrixkoeffizienten a, b und c .

Trotz zeilenweiser Skalierung der Matrix kommt es immer noch zu Verzerrungen der zwei Randpunkte,

4.4.2 SNAKES IMPLEMENTIERUNG

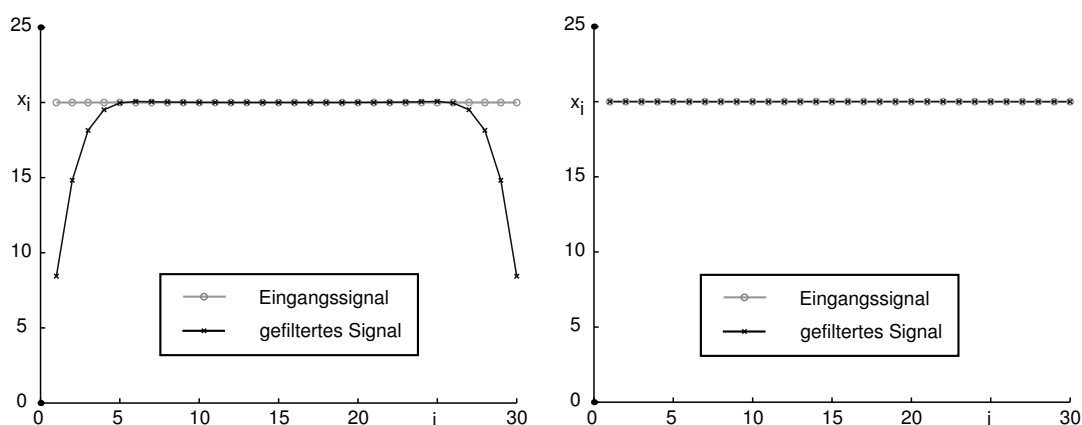


Abbildung 4.6: Zeilenweise maßstabstreuere Filterung.

Links ist das Ergebnis der Filterung mit einer “global“ regularisierten Matrix A_P mit dem Regularisierungsparameter $\lambda = 1$ zu sehen. Im rechten Bild erfolgte die Filterung mit einer zeilenweise skalierten Matrix nach der Formel (4.58).

da diese weiterhin anders gefiltert werden als die mittleren Punkte (vgl. Abb. 4.7). Um eine äquivalente Filterung zu erhalten, ist eine *Maßstabskorrektur der Randkoeffizienten* der Matrix A_P durchzuführen. Bei dieser werden die Elemente der Hauptdiagonale $C_{1,1}^P$ und $C_{2,2}^P$ gleich dem Matrixelement $C_{3,3}^P$ gesetzt. Dann multipliziert man die anderen Zeilenelemente mit einem Wert s_i so, daß die Summe der Zeile wieder Eins ergibt. Die Werte s_i für die Multiplikation mit den Elementen der Nebendiagonalen der äußersten Zeilen $C_{1,1..n}^P$ und $C_{n,1..n}^P$ berechnen sich:

$$s_1 = s_n = \frac{1 - C_{3,3}^P}{C_{1,2}^P + C_{1,3}^P}, \quad (4.59)$$

sowie für die zweite Zeile $C_{2,1..n}^P$ und die vorletzte Zeile $C_{n-1,1..n}^P$:

$$s_2 = s_{n-1} = \frac{1 - C_{3,3}^P}{C_{2,1}^P + C_{2,3}^P + C_{2,4}^P}. \quad (4.60)$$

Erhaltung der Linienendpunkte

Die genannten Modifikationen zur Maßstabstreuung werden durchgeführt, um die Filterung als ausgleichende Funktion nutzen zu können. Betrachtet man in der Abbildung 4.7 die Randwerte der Graphen, dann sieht man, daß auch diese geglättet werden. Für die Linienglättung der Generalisierung ist es aber essentiell, daß die Linie vor und nach der Filterung die gleichen Anfangs- und Endpunkte hat, um die topologischen Beziehungen zwischen den Kartenobjekten zu erhalten.

Für die Lösung des Problems schlägt [Burghardt, 2002a] zwei Varianten vor:

- (a) Die Mehrfachnutzung der Anfangs- und Endpunkte.
- (b) Die Verlängerung der ursprünglichen Linie durch Spiegelung an den Endpunkten.

4.4.2 SNAKES IMPLEMENTIERUNG

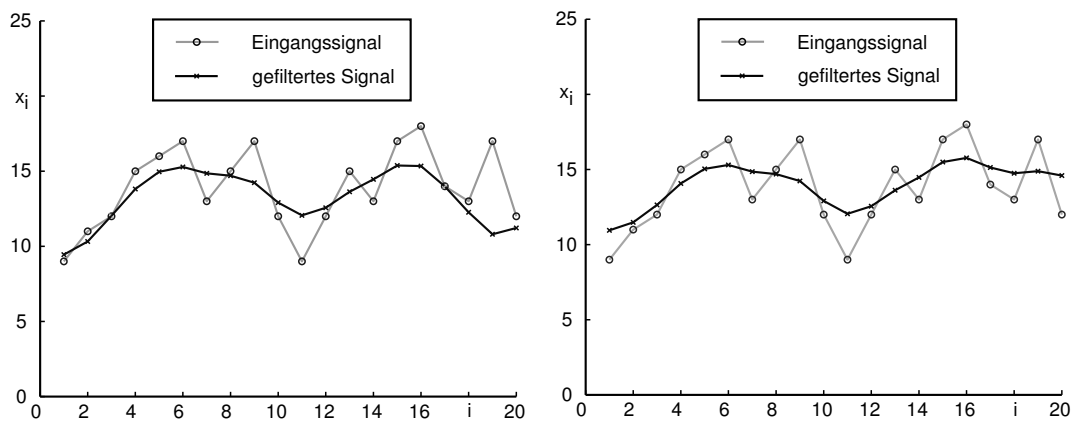


Abbildung 4.7: Maßstabskorrektur der Randkoeffizienten.

Links: Filterergebnis mit zeilenweiser skaliertes Matrix A_P . *Rechts:* Ergebnis mit zusätzlicher Skalierung der Randkoeffizienten mit den Formeln (4.59) und (4.60). Die Snakes-Funktion gleicht jetzt die Signalwerte am Rand besser aus.

Gemeinsam ist beiden Verfahren, daß die nötige Anzahl der “anzuhängenden“ Punkte in einer Voriteration bestimmt wird. Hierfür wird eine maximale Abweichung von der Originallinie definiert, welche ab einem bestimmten Randpunkt unterschritten wird. Alle Randpunkte bis zu diesem werden gespiegelt, oder der äußere Punkt ist der Punkteanzahl entsprechend häufig zu vervielfältigen.

Aufgrund der Korrekturen im vorigen Abschnitt wird bei der Realisierung der Snakes-Glättung etwas anders vorgegangen. Die Anzahl der zu spiegelnden Randwerte wird in Abhängigkeit von der Breite des Filters festgelegt. Im Falle des Snakes-Algorithmus sind dies fünf Punkte. Trotz der Korrektur kann es bei einer iterativen Glättung mit einer hohen Anzahl an Iterationsschritten zur Verschiebung der Randpunkte kommen. Aus diesem Grunde sollte es das Ziel sein, die Linie in nur wenigen Schritt zu glätten. Ein Beispiel für die Erhaltung der Anfangs- und Endpunkte ist in der Abbildung 4.8 zu sehen.

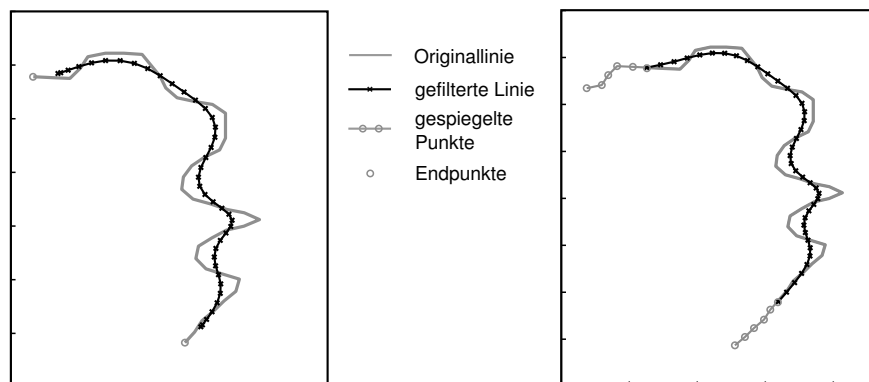


Abbildung 4.8: Erhaltung der Anfangs- und Endpunkte von Linien durch Spiegelung.

Links: Geglättete Linie mit Skalierung der Matrix und Koeffizientenkorrektur. *Rechts:* Das Glättungsergebnis mit zusätzlicher Spiegelung der Randpunkte.

4.5 Glättung mit Tafus

4.5.1 Ansatz der externen Energie

Bisher gibt es noch keine Erfahrungen Tafus für die Linienglättung zu verwenden. Es bietet sich daher an, wie bei den Snakes die externe Energie als konstanten Wert festzulegen.

Ansatz I:

$$\mathbf{b}_\varphi = \mathbf{E}_\varphi^{ext}(\phi, s) = \frac{\partial E_{ext}}{\partial \varphi} = \frac{\partial Const}{\partial \varphi} = \mathbf{0} \quad (4.61)$$

Das zu lösende Gleichungssystem mit dem Iterationsansatz 4.35 ist somit:

$$\mathbf{G}\varphi^t = \lambda \mathbf{I}\varphi^{t-1} + \mathbf{0}. \quad (4.62)$$

Da auch hier wie bei den Snakes das Problem entsteht, daß sich analytisch keine Durchlaßcharakteristik ermitteln läßt, wurde nach einem zweiten Ansatz gesucht, mit dem die Aufgabenstellung besser erfüllt werden kann. Desweiteren erwiesen sich bei Tests mit konstanter externer Energie Knickstellen in der Linie als problematisch. Diese bilden Sprünge im Verlauf der Tangentenwinkelfunktion (TWF), welche das zu glättende Signal im Tafus-Modell darstellt. Wird die TWF stark gefiltert, werden die Sprünge beseitigt. Dies hat zur Folge, daß die Linie an der vormaligen Knickstelle eine vollkommen andere Richtung erhält und die Linie zerstört wird.

Überlegungen mit [Borkowski, 2002] führten dazu, daß es bei einem zweiten Ansatz günstig wäre, die Glättung an den Problemstellen zu steuern. Knickstellen zeichnen durch große Krümmungsbeträge aus. Aus diesem Grund wird die rechte Seite des Gleichungssystems der Krümmung proportional gesetzt:

Ansatz II:

$$\frac{\partial E_{ext}}{\partial \varphi} = -\dot{\phi}, \quad (4.63)$$

$$\mathbf{G}\varphi^t = \lambda \mathbf{I}\varphi^{t-1} + \dot{\phi}^{t-1}. \quad (4.64)$$

Nach dem gleichwertigen iterativen Ansatz von [Borkowski und Meier, 1999] ist das folgende System zu lösen:

$$\varphi^t = \varphi^{t-1} + \mathbf{G}^{-1}\dot{\phi}^{t-1}. \quad (4.65)$$

Die Glättung mit diesem Tafus-Modell ist nicht mehr an allen Stellen gleich stark, sondern ortsabhängig. Demnach realisiert der zweite Ansatz ein instationäres Filterverfahren bezüglich der Koordinatenfunktionen.

4.5.2 Durchlaßcharakteristik und Steuerparameter α und β

Die Berechnung einer Durchlaßcharakteristik (D-Char.) für den **Ansatz I** ist aufgrund der verschwindenden Inhomogenität $\frac{\partial E_{ext}}{\partial \varphi}$ nicht möglich. Es kann aber auch hier ersatzweise $E_{ext} = \frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi)^2$ festgelegt werden. Wird E_{ext} in Gleichung (4.27) eingesetzt, dann bekommt die Differentialgleichung folgendes Aussehen:

$$(1 + \alpha)\varphi - \beta\ddot{\varphi} = \varphi_0. \quad (4.66)$$

4.5.2 DURCHLASSCHARAKTERISTIK DER TAFUS

Zusammen mit der Vorschrift (4.52) für die Berechnung der Filtereigenschaft ergibt sich die D-Char. eines Tiefpaßfilters:

$$G(\omega) = \frac{1}{(1 + \alpha) + \beta\omega^2}. \quad (4.67)$$

Damit gilt die gleiche Aussage zur Parametersteuerung wie bei den Snakes, daß für große α und β die Tangentenwinkelfunktion stark geglättet wird.

Bei den durchgeführten Experimenten mit dem Ansatz einer konstanten externen Energie war jedoch das Folgende festzustellen:

- Das Parameterverhalten entspricht nicht dem des Behelfsansatzes.
- Die Wahl der Parameter beschränkt sich, im Gegensatz zu den Snakes, nur auf einen kleinen Wertebereich. Die Ursache dafür liegt in der Zerstörung der Linie, wenn die TWF zu stark geglättet wird. Durch starke Glättung erhalten die Tangentenwinkel eine vollkommen andere Richtung und die Wiederherstellung der ungefähren Lage der Ursprungslinie mittels Bogenformel oder Vorwärtseinschneiden wird unmöglich.

Um das Parameterverhalten zu erklären, muß auf eine andere Möglichkeit als die Nutzung der Durchlaßcharakteristik zurückgegriffen werden. Für den Ansatz $E_{ext} = const$ kann man die Differentialgleichung auch mit dem in der Physik bekannten Modell einer gedämpften Schwingung vergleichen (siehe [Gertensen und Vogel, 1999, S.150]) :

Tafus	gedämpfte Schwingung
$\frac{\partial E_{ext}}{\partial \varphi} + \alpha\varphi - \beta\ddot{\varphi} = 0$	$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

Die Größen der Schwingungsgleichung sind die Eigenfrequenz ω_0 und die Dämpfungskonstante γ , welche das Abklingverhalten der Schwingung bestimmt.

Bei der Dämpfung der Schwingung unterscheidet man 3 Fälle:

- (1) $\gamma < \omega_0$: schwache Dämpfung
- (2) $\gamma = \omega_0$: aperiodischer Grenzfall
- (3) $\gamma > \omega_0$: starke Dämpfung

Stellt man die Differentialgleichung der Tafus um:

$$\beta\ddot{\varphi} + 0\dot{\varphi} - \alpha\varphi = 0, \quad (4.68)$$

dann ist folgende Zuordnung zu erkennen:

$$2\gamma = 0 \quad \text{und} \quad \omega_0^2 = -\frac{\alpha}{\beta}. \quad (4.69)$$

In Übereinstimmung mit den Untersuchungsergebnissen läßt sich die Aussage treffen, daß eine starke Glättung durch große β oder kleine α hervorgerufen wird. Ist das Verhältnis $\alpha/\beta = 1$, so tritt ein mittlerer Glättungseffekt auf, der unter Umständen die Linie zerstören kann. Ist $\beta = 0$ wird die TWF nicht

4.5.2 DURCHLASSCHARAKTERISTIK DER TAFUS

gefiltert und die Linie bleibt ungeglättet.

Für den **Ansatz II** läßt sich die Durchlaßcharakteristik nach der Gleichung (4.52) von [Meier und Keller, 1990] ermitteln. Die anzusetzende Differentialgleichung hat die Form:

$$\alpha\phi - \beta\ddot{\phi} = \dot{\phi}. \quad (4.70)$$

Mit der Vorschrift

$$|G(j\omega)|^2 = \frac{|P_m(j\omega)|^2}{|Q_n(j\omega)|^2}, \quad (4.71)$$

und der Zuordnung $(j\omega)^n = \phi^{(n)}$, werden Q_n die Terme der linken Seite und $P = \phi$ zugewiesen. Die D-Char. lautet dann:

$$|G(j\omega)|^2 = \frac{|j\omega|^2}{|\alpha - \beta(j\omega)^2|^2}, \quad (4.72)$$

$$G(\omega) = \frac{\omega}{\alpha + \beta\omega^2}. \quad (4.73)$$

Die ermittelte Filtercharakteristik beschreibt einen Bandpaßfilter, dessen Term $|j\omega|^2$ eine Phasenverschiebung um $\pi/2$ bewirkt. Für große Parameter α und β muß eine starke Dämpfung auftreten.

Aber auch hier ist das Parameterverhalten in den Untersuchungen divergent zu den Schlußfolgerungen aus der Formel (4.72). Dies macht es erforderlich, erneut auf das physikalische Modell der gedämpften Schwingung zurückzugreifen. Die umgestellte Gleichung (4.70) lautet:

$$\beta\ddot{\phi} - \dot{\phi} - \alpha\phi = 0 \quad (4.74)$$

und die Zuordnung zu den Parametern der Schwingungsgleichung ergibt:

$$2\gamma = \frac{1}{\beta} \quad \text{und} \quad \omega_0^2 = -\frac{\alpha}{\beta}. \quad (4.75)$$

Unterscheidet man wiederum die drei Schwingfälle, so ergibt sich eine schwache Dämpfung für:

$$\omega_0 \gg 2\gamma \quad \text{bzw.} \quad : j^2\alpha\beta \gg \frac{1}{2}. \quad (4.76)$$

Die Parameter α und β müssen demnach große Werte ($\approx 1 \dots 100$) erhalten. Soll hingegen eine starke Dämpfung erzielt werden, dann folgt aus:

$$\omega_0 \ll 2\gamma \quad \text{bzw.} \quad : j^2\alpha\beta \ll \frac{1}{2}, \quad (4.77)$$

die Zuweisung kleine Parameter für α und β ($\approx 0.5 \dots 1$).

Anschaulich interpretiert ist die Snake-Funktion für kleine Parameterwerte nicht sehr resistent gegen die von außen drückenden Kräfte. Mit zunehmenden Beträgen von α und β wird sie widerstandsfähiger und verformt sich weniger. Da die Gewichtung der Glättung durch die lokale Krümmung erfolgt, können den Parametern die selben Werte zugewiesen bzw. $\alpha = \beta$ gesetzt werden. Eine unterschiedliche Glättungswirkung von α und β wie bei den Snakes ist nicht festzustellen.

Bemerkung zur Lösung der Aufgabenstellung

In den vorangegangenen Absätzen wurde versucht, eine Durchlaßcharakteristik für den zweiten Tafus-Ansatz zu ermitteln sowie das Parameterverhalten für beide Modelle zu beschreiben. Während eine Durchlaßcharakteristik für den ersten Ansatz nicht bestimmbar ist, entsprechen die Filtereigenschaften des zweiten Ansatzes einem Bandpaßfilter. Demzufolge ist der dritte Teil der Aufgabenstellung, nämlich die Abschätzung der Steuerparameter für die Tafus, durch Vergleich der Durchlaßcharakteristiken von Wavelet-Filterung und Tafus-Glättung nicht durchführbar, da die Wavelet-Filterung einen Tiefpaßfilter realisiert.

4.5.3 Tafus - Implementierung, Defekte und Verbesserungen

Maßstabstreue Filterung

Nach der Implementierung des ersten Ansatzes mit $E_{ext} = const$ und der Durchführung von Tests mit den Beispielen waren zwei Probleme erkennbar:

- Die Größe der Punktverschiebungen ist von der Größe des Tangentenwinkels (TW) bzw. von der Lage der Linie im Koordinatensystem abhängig (Abb. 4.10, links).
- Durch extreme Glättung der Tangentenwinkelfunktion (TWF) kann die Linie nur noch teilweise richtig rekonstruiert werden (vgl. Abb. 4.10, rechts). Sie wird an den Stellen starker Glättung zerstört, wenn sich ungünstige Bedingungen für das Vorwärtseinschneiden ergeben, wie z. B. die starke Änderung der Tangentenwinkelrichtung von Nord nach Ost.

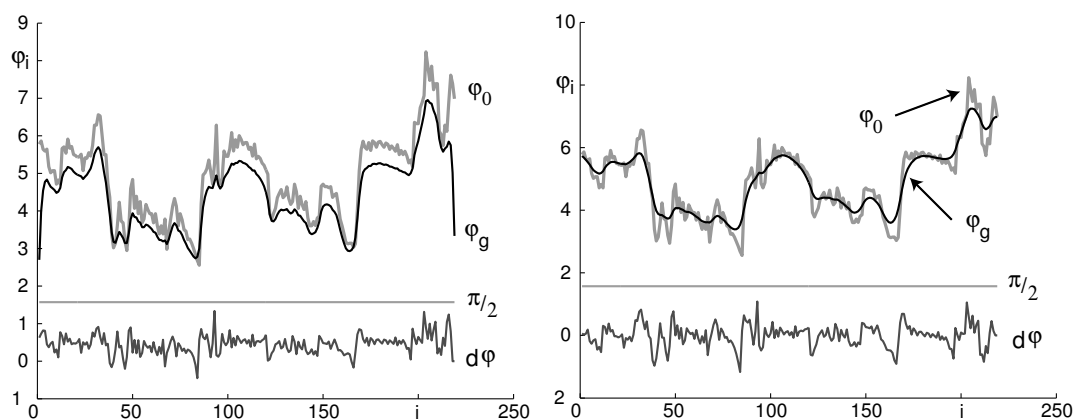


Abbildung 4.9: Tafus-Defekte für den Ansatz mit konstanter Energie.

Links: Nicht maßstabstreu gefiltert mit $\alpha = 1.2, \beta = 1.5$. Die ursprüngliche TWF φ_0 wird für große Tangentenwinkel stärker geglättet als für kleine Winkel. $d\varphi = \varphi_0 - \varphi_g$ ist die umzusetzende Verschiebung zwischen geglätteter TWF φ_g und ursprünglicher TWF φ_0 . *Rechts:* Maßstabstreu aber zu starke Filterung der TWF φ_0 mit skalierter Matrix ($\alpha = 1, \beta = 10$). Die Skalierung der Matrix beseitigt auch die Verzerrung der Randwerte im linken Bild.

Die Ursache des ersten Problems ist die bisher nicht maßstabstreu gefilterte TWF, durch die große TW stärker geglättet werden als kleine. Betrachtet man wieder eine Zeile der Matrix \mathbf{A}_T als Filtervektor, diesmal mit

4.5.3 TAFUS - IMPLEMENTIERUNG

drei Filterkoeffizienten:

$$\mathbf{A}_i^T = \left| 0 \dots 0 \quad b \quad a \quad b \quad 0 \dots 0 \right|,$$

mit:

$$a := \alpha + 2\beta \quad \text{und:} \quad b := -\beta,$$

und summiert die Elemente, um das Maßstabsverhalten zu bestimmen:

$$\sum_{j=1}^n c_{i,j} = -2\beta + \alpha + 2\beta = \alpha, \quad (4.78)$$

dann wird ersichtlich, daß die Wahl des Parameters α über die Maßstabstreue der Filterung bestimmt. Für $\alpha = 1$ ist die Filterung maßstabstreu. Wird das System hingegen regularisiert, dann ergibt sich für die Zeilensumme:

$$\sum_{j=1}^n c_{i,j} = -2\beta + \alpha + 2\beta + \lambda = \lambda + \alpha. \quad (4.79)$$

Ist der Konvergenzfaktor mit $\lambda = 1$ festgelegt, dann muß $\alpha = 0$ gesetzt werden, um Maßstabstreue zu erreichen.

Eine bessere Lösung zur Herstellung einer maßstabstreuen Filterung und damit die Beseitigung der Abhängigkeit vom Koordinatensystem ist die *Skalierung* der Matrix wie bei den Snakes. Sie verhindert zudem die Verzerrung der Randwerte, welche durch die (Zweipunkt-) Filterung der ersten und letzten Zeile von \mathbf{A}_T hervorgerufen wird (vgl. auch Abschnitt 4.4.2 - Maßstabstreue Filterung). Die Skalierung muß angewendet werden, wenn mit variablen Koeffizientenmatrizen gearbeitet wird und die "punktweise" Herstellung der Maßstabstreue erforderlich ist.

Das zweite Problem, die extremen Glättung der TWF, läßt sich auf zwei Arten lösen: Zum einen kann die Parameterwahl so einschränkt werden, daß nur noch gering geglättet wird. Zum anderen ist die Einführung einer maximal Verschiebung $d\phi$ denkbar, bei der keine Zerstörung der Linien auftritt.

Der zweiten Ansatz, bei dem $\frac{\partial E_{ext}}{\partial \phi} = -\phi$ festgesetzt wird, realisiert eine solche Beschränkung. Die Krümmung ϕ kann aufgrund der Definition der TWF als Winkelfunktion zwischen $0 \dots 2\pi$ nur maximale Werte von 2π erreichen und die Glättungsbeträge $d\phi$ sind für eine maßstabstreue Filterung in der Regel klein. Aus diesem Grund wird die Umsetzung des ersten Ansatzes mit konstanter äußerer Energie verworfen, und stattdessen die Realisierung des zweiten Ansatzes verfolgt. Durch die kleinen Verschiebungen können in einem Schritt allerdings keine starken Glättungen erreicht werden. Sollen starke Formvereinfachungen erzielt werden, dann ist das Verfahren *iterativ* durchzuführen.

Um die Maßstabstreue des zweiten Ansatzes zu gewährleisten, wird statt einer Regularisierung vorgeschlagen, den Parameter $\alpha = 1$ zu setzen. Damit ist nur noch β frei wählbar. Die berechneten Zeilensummen für die Matrix \mathbf{A}_T mit $\alpha = 1$ haben folgende Beträge:

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b & a & b & 0 & 0 & \\ 0 & b & a & b & 0 & \\ \vdots & & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \beta \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}.$$

Für kleine β ist der Maßstab für den ersten und letzten Signalwert annähernd Eins. Bei großen Beträgen müßten starke Verfälschung der Signalrandwerte auftreten. Da aber die Matrix \mathbf{A}_T invertiert wird, ist die

Glättung und damit auch die Verfälschung für große β gering. Eine gesonderte Korrektur des ersten und letzten Wertes ist infolgedessen nicht unbedingt nötig, wird aber nach weiterführenden Überlegungen zur Erhaltung der Anfangs- und Endpunkte in jedem Fall vorgenommen.

Restriktionen

Nach der Implementierung des zweiten Ansatzes ohne Regularisierung der Matrix, verhält sich das iterative Verfahren ziemlich robust, wenn man die Parameter $\alpha = const = 1$ und $\beta = 1$ wählt. Die im vorangegangenen Abschnitt prognostizierte Phasenverschiebung hat durch die Art der Diskretisierung nach [Kass et al., 1987] keine Auswirkung, weil die Koeffizientenmatrix \mathbf{A}_T eine symmetrische Struktur erhält. Probleme gibt es allerdings an Knickpunkten der Linie, welche durch einzelne große Krümmungswerte gekennzeichnet sind. Diese nicht differenzierbaren Stellen dürfen nach Kapitel 2.1 nicht auftreten, sind jedoch in realen Signalen enthalten. Damit der Tafus-Algorithmus ohne Einschränkungen anwendbar ist, werden Restriktionen eingeführt:

- Durch die erste Restriktion wird die Glättung an den Knickstellen verringert, womit diese erhalten bleiben:

$$\phi_i = \begin{cases} \text{sign}(\phi_i) \cdot (2\pi - \phi_i) & \text{falls: } |\phi| > \pi \\ \phi_i & \text{falls: } |\phi| \leq \pi \end{cases} \quad (4.80)$$

- Zur Vermeidung extremer Punktverschiebungen und zur Sicherstellung der richtigen Rekonstruktion der Linie werden nur maximale Krümmungen von $\pi/3$ zugelassen:

$$\hat{\phi}_i = \begin{cases} \text{sign}(\phi_i) \cdot \frac{\pi}{3} & \text{falls: } |\phi| > \frac{\pi}{3} \\ \phi_i & \text{falls: } |\phi| \leq \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad (4.81)$$

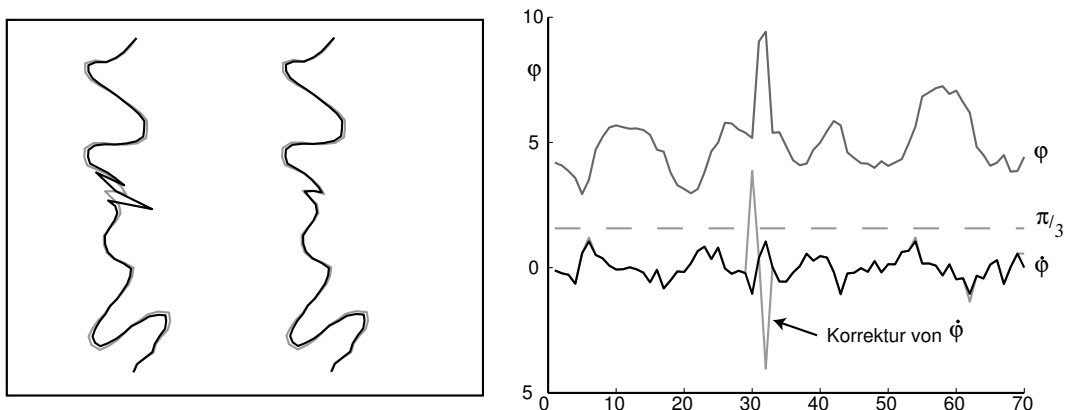


Abbildung 4.10: Restriktionen für den Tafus Ansatz mit $\frac{\partial E_{\text{ext}}}{\partial \phi} = \hat{\phi}$.

Im linken Bild wurde die linke Linie ohne und die rechte Linie mit Restriktionen geglättet (Parameter $\alpha = 1, \beta = 5$), wobei die Knickstelle keine Probleme mehr bereitet. Im rechten Bild ist die zugehörige Tangentenwinkelfunktion ϕ sowie die ursprüngliche und die korrigierte Krümmung $\hat{\phi}$ zu sehen.

Erhaltung der Anfangs- und Endpunkte

Um die Glättung mit Tafus für die Generalisierung verwenden zu können, müssen die Anfangs- und Endpunkte der Linie vor und nach der Filterung gleich sein. Eine Spiegelung der Randpunkte¹ der zu glättenden Tangentenwinkelfunktion ist allerdings nicht nötig, da die Winkeländerungen $d\varphi$ aus der geglätteten Krümmung berechnet werden. Damit sich keine Winkeländerung ergibt, ist entweder diese oder der entsprechende Krümmungswert Null zu setzen.

Da bei der Rücktransformation von der Tangentenwinkeldarstellung in kartesische Koordinaten ohnehin die Koordinaten des Startpunktes der Linie verwendet werden, gilt dies nur für den letzten Wert des jeweiligen Vektors. Ein besserer Übergang zwischen einzeln geglätteten Segmenten einer Linie wird dadurch gewährleistet, daß ebenfalls die äußeren 2-3 Randwerte gewichtet werden:

$$d\varphi_n = d\varphi \cdot \mathbf{g}$$

mit:

$$\mathbf{g} := \left[\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} \quad 0 \right].$$

In den vorangegangenen Abschnitten wurde das Snakes- und das Tafus-Modell zur Linienglättung eingeführt. Gleichzeitig erfolgte die Nennung von Implementationsbedingungen, welche die Anwendbarkeit der Algorithmen für die Formvereinfachung sicherstellen.

Nach Herleitung der Durchlaßcharakteristiken für zwei Tafus-Ansätze wurde festgestellt, daß der Vergleich der Glättung der Tangentenwinkelfunktion mit Tafus und Wavelets nur bedingt möglich ist. Folglich ist der dritte Teil der Aufgabenstellung, nämlich die Abschätzung der Tafus-Steuerparameter aus der Durchlaßcharakteristik der Wavelet-Filterung, nicht durchführbar.

¹siehe Snakes-Glättung

5 Steuerung und Optimierung der Glättungsverfahren

Da im vorhergehenden Kapitel nur auf die Funktionalität der Snakes- und Tafus-Modelle eingegangen wurde, beschäftigt sich dieses Kapitel mit der Ermittlung sinnvoller Steuerparameter für die Filterung sowie mit Überlegungen zur Optimierung der Modelle. Die Glättungssteuerung kann sowohl über die Modell-Parameter α und β , als auch durch einen iterativ ablaufenden Algorithmus realisiert werden. Wird letzterer Ansatz verfolgt, dann sind für die Iteration geeignete Abbruchgrößen zu definieren. Die im Kapitel "Glättung durch Wavelet-Transformation" aufgestellten Kenngrößen der Wavelet-Glättung werden daraufhin auf ihre Eignung als Abbruchparameter untersucht.

Zur Optimierung der Glättung werden variable Koeffizientenmatrizen eingeführt und eine Segmentierung der Linien zum Erhalt charakteristischer Kurvenpunkte vorgeschlagen. Abschließend folgt ein Vergleich der drei Glättungsverfahren, verbunden mit Hinweisen zu deren Einsatz.

5.1 Steuerung der Glättung

5.1.1 Die Parameter α und β

Die zunächst wichtigste Steuerungsmöglichkeit für beide Energieminimierungsverfahren sind die beiden Parameter der inneren Energie α und β . Sie gewichten die beiden Terme der Neigung und Krümmung gegeneinander sowie gegen die äußere Energie.

Für die Glättung mit **Snakes** ist die äußere Energie eine Konstante und die Inhomogenität Null. Dadurch erfolgt bei der Wahl von α und β nur die Festlegung des Glättungsgrades und nicht die Gewichtung der inneren Energie gegen eine der Formvereinfachung entgegenwirkende äußere Energie.

Nach der Ermittlung der Durchlaßcharakteristik unter Nutzung des Hilfsansatzes $E_{ext} = \frac{1}{2}(x_0 - x)^2$ im Abschnitt 4.4.2 wurde festgestellt, daß große α und β eine starke Formvereinfachung bewirken. Desweiteren wurde für mittlere und starke Glättungen empfohlen, unter Beibehaltung von $\alpha = 1$ den Parameter β zu verändern. Hierdurch bleibt die mittlere Richtung der Linie besser bewahrt und nur kleine Bögen werden geglättet (vgl. Abb. 5.1). Sind hingegen geringe Formvereinfachungen das Ziel, dann ist $\beta = 1$ festzusetzen und durch die Wahl von $\alpha \leq 1$ der Grad der Glättung zu bestimmen.

Durch direkte Glättung der Koordinatenfunktionen treten bei Snakes kaum Defekte auf. Selbst scharfe

5.1.2 ITERATIVE GLÄTTUNG

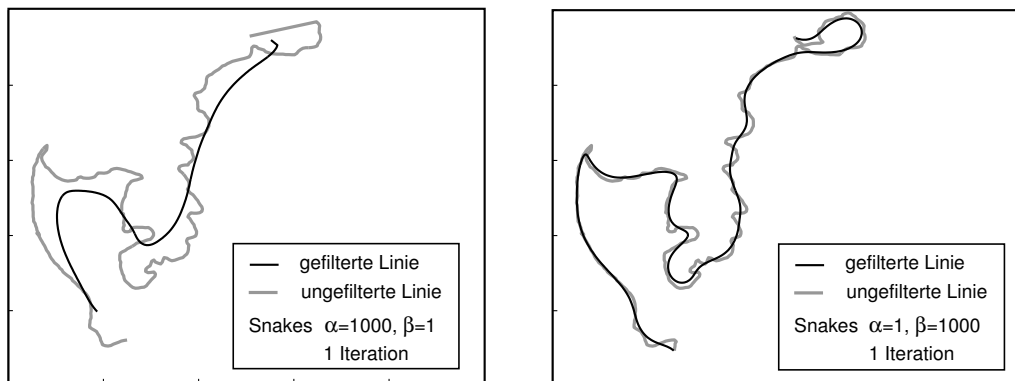


Abbildung 5.1: Snakes-Glättung mit unterschiedlicher Parameterwahl.

Für große β bleibt die Richtung der Linie besser erhalten.

Knicke, die Problemstellen des Tafus-Verfahrens, werden gut geglättet. Mit geeigneter Parametereinstellung läßt sich fast jeder Glättungsgrad in nur *einem* Durchlauf erreichen. Für konstante $\alpha = 1$ können die Werte von β im Bereich von $1 \dots 50000$ (oder größer) gewählt werden.

Allerdings kommt es bei der Wahl von Werten $\beta > 1000$ trotz Spiegelung zu Verschiebungen der Endpunkte, welche eine gesonderte Korrektur erforderlich machen. Mit der Festlegung $\beta = 0$ wird vor der Invertierung einer tridiagonale Matrix erzeugt, die einem kantenverstärkenden Filter gleicht. Erst nach der Invertierung entspricht sie dem gewünschten gewichteten Mittelwertfilter.

Bei den **Tafus** wurde im Abschnitt 4.5.3 vorgeschlagen, den Parameter $\alpha = 1$ zu setzen, um eine maßstabstreue Filterung der Tangentenwinkelfunktion zu erhalten. Folglich ist nur der Parameter β frei wählbar. Mit Hilfe des physikalischen Modells der gedämpften Schwingung konnte geschlußfolgert werden, daß große β eine kleine Dämpfung bzw. Glättung hervorrufen und kleine β stark glätten. Ein sinnvoller Wertebereich kann mit $0.5 \leq \beta \leq 1000$ angegeben werden. Als untere Schranke wird 0.5 gewählt, da bei kleineren Werten ein Defekt auftritt, der sich in einer wellenartigen Verformung der Linie ausprägt (vgl. Abbildung 5.2). Veranschaulicht wird die innere Energie der Schlange durch kleine Werte von β zu schwach und somit deren Struktur zerstört. Die Festlegung von 0.5 als Mindestwert von β erfolgt in Anlehnung an das physikalische Schwingungsmodell, bei dem eine schwache Dämpfung für $j^2 \alpha \beta \gg 0.5$ bzw. $j^2 1 \beta \gg 0.5$ erzielt wird. Für den Parameterwert $\beta = 1000$ tritt bei einem Iterationsschritt praktisch kein Glättungseffekt auf.

5.1.2 Iterative Glättung mit Snakes und Tafus

Starke Formvereinfachungen mit dem Tafus-Algorithmus sind nur durch eine iteratives Filterverfahren erzielbar. Wird mit Snakes geglättet, dann ist ein iterativer Algorithmus berechtigt, wenn ein Glättungsgrad vorgegeben ist und die dafür nötige Einstellung des Parameters β zu kompliziert erscheint.

Wird die Filterung mit Snakes oder Tafus iterativ durchgeführt, so kann man einerseits die Anzahl der Iterationen festlegen oder Zielgrößen einführen, die den gewünschten Grad der Formvereinfachung beschreiben. Günstig ist es, wenn diese Größen geeignet sind, um die drei Glättungsverfahren mit Tafus,

5.1.3 ABRUCHGRÖSSEN DER ITERATION

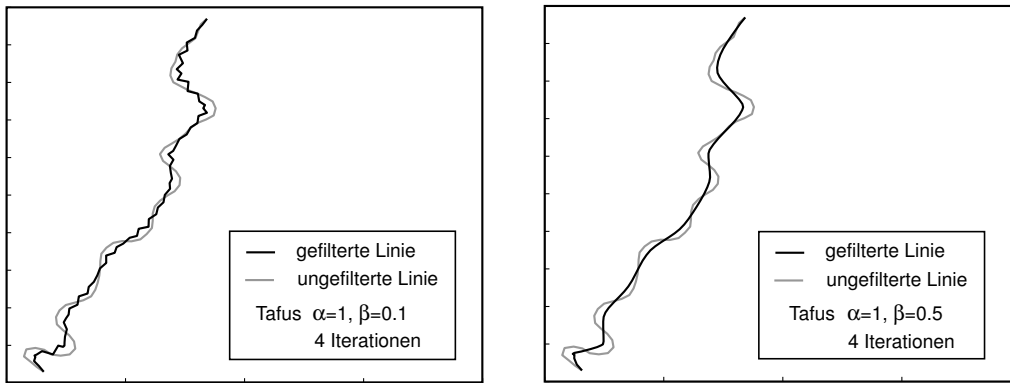


Abbildung 5.2: Welleneffekt für Tafus mit $\beta \leq 0.5$.

Die Linie im rechten Bild bleibt durch Beachtung der Parameterschranke für β erhalten

Snakes und Wavelets zu vergleichen. Deshalb werden im nächsten Abschnitt die im Kapitel 3.3 der Wavelet-Filterung vorgestellten Kenngrößen als Abbruchparameter untersucht.

5.1.3 Abbruchgrößen der Iteration

Die Skalenenergie

Eine resultierende Kenngröße der Wavelet-Filterung ist die Skalenenergie $SE(a)$. Sie berechnet sich aus der Quadratsumme der Wavelet-Koeffizienten jeder Skala a (siehe Gleichung (5.2)). Da es für die Tafus und Snakes kein entsprechende Maß gibt, die Wavelet-Koeffizienten der Tangentenwinkelfunktion (TWF) im Fall des Haar-Wavelets aber die diskrete Krümmung approximieren, wird als vergleichende Energie die Krümmungsenergie E_K der Linie getestet. Schließlich soll diese mit Hilfe der folgenden Beziehung als Abbruchkriterium definiert werden:

$$\frac{E_K^0}{E_K^i} = \frac{\sum_{a=1}^k SE_a^0}{\sum_{a=1}^k SE_a^i}. \quad (5.1)$$

Der hochgestellte Index 0 bezeichnet die ungefilterte Linie und E_K^i die Krümmungsenergie nach jedem Iterationsschritt i . Die Summe der Skalenenergien SE_a^j ist die Summe der Energien von k Skalen, wobei die Wavelet-Koeffizienten der Skalen 1 bis $j-1$ Null gesetzt worden sind (j -te Filterstufe). Die Energien berechnen sich mit den Formeln:

$$SE(a) = \sum_n |wk(a)|^2 \quad \text{und} \quad E_K = \sum_m |\dot{\phi}|^2. \quad (5.2)$$

Um zu prüfen, ob der Vergleich von Skalenenergie und Krümmungsenergie prinzipiell möglich ist, wurde die linke Grafik von Abbildung 5.3 berechnet. Dabei stellt die Kurve der Skalenenergie das Verhältnis der Energie der ungefilterten Linie zur Energie nach der Sperrfilterung dar. Ebenso bildet die Kurve der Krümmungsenergie das Verhältnis von Krümmungsenergie der ungefilterten Linie zur Energie nach jedem Tafus-Iterationsschritt ab.

Die Skalenenergie verändert sich in den niederen Filterstufen nur wenig. Sie liegt in der ersten Filterstufe bei einem prozentualen Filterwert von ca. 99,97 % und erst in der höchst möglichen Filterstufe, bei

5.1.3 ABRUCHGRÖSSEN DER ITERATION

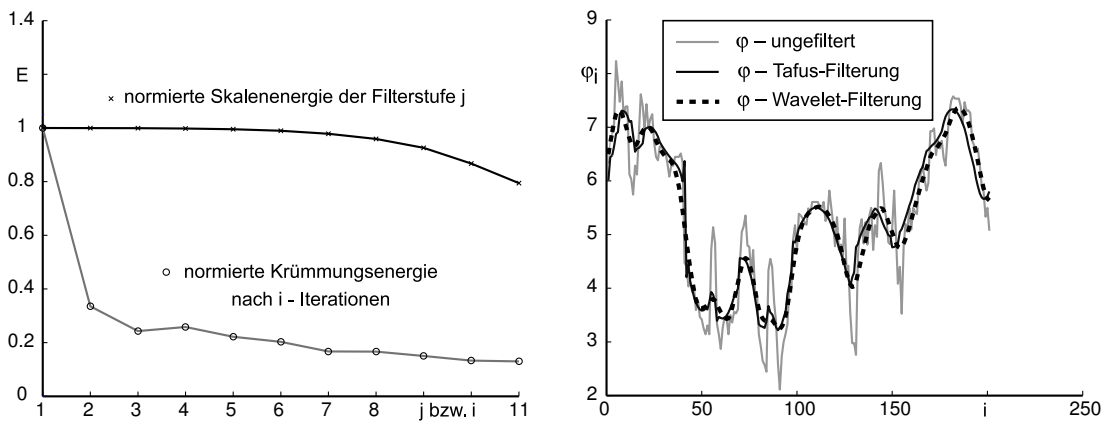


Abbildung 5.3: Vergleich der Krümmungsenergie und der Skalenenergie.

Linkes Bild: Darstellung der Skalenenergie mit steigender Sperrfilterstufe (1-11), ohne Filterung in der ersten Stufe, sowie berechnete Krümmungsenergie nach jedem Iterationsschritt bei der Glättung mit Tafus. Der erste Wert beschreibt die Energie der ungefilterten Linie. *Rechtes Bild:* Nach 7 Iterationen und den Parametern $\alpha = 1, \beta = 0.5$ sind sich die mit Tafus geglättete TWF φ und die mit Wavelets gefilterte TWF ähnlich.

der alle Skalen außer der größten Null gesetzt wurden, erreicht sie einen Wert von ca. 80 %. Hingegen wird die Krümmungsenergie schon nach der ersten Iteration um 60 % verringert. Im Verlauf der Iteration nimmt die Stärke der Filterung mit Tafus bzw. das Verhältnis der Krümmungsenergien immer mehr ab und konvergiert scheinbar. Die Darstellung der beiden Graphen der TWF offenbart deutliche Differenzen im Glättungsgrad. Eine Vergleichbarkeit ist nicht gegeben.

Einen Beleg dafür gibt ebenfalls die rechte Grafik der Abbildung (5.3). Nach ca. 7 Iterationsschritten des Tafus-Algorithmus wird der gleiche Glättungsgrad der TWF erreicht wie bei der Wavelet-Filterung ohne die Skalen 1-3 (Filterstufe 4). Dies entspricht einer Filterung der Skalenenergie auf 99,81 %. Dem entgegen wurde die Krümmungsenergie nach 7 Iterationen auf 16,6 % reduziert.

Die Krümmungsvarianz

Nachdem die Skalenenergie als Vergleichsparameter verworfen werden muß, soll die Varianz der Krümmung auf ihre Eignung als vergleichendes Glättungsmaß untersucht werden. Vorteil dieser ist die unmittelbare Berechnung in den drei Verfahren.

Während die Steuerbarkeit mit der Krümmungsvarianz und damit auch die einfache Gegenüberstellung von iterativem Snakes- und Tafus-Algorithmus auf der Hand liegt, ist ein Vergleich mit der Wavelet-Glättung nur schwer möglich. Die Rücktransformation der geglätteten TWF unterliegt zahlreichen Einflüssen, welche die Wiederherstellung einer geglätteten Linie erschweren und unbedingt beachtet werden müssen. Die im Kapitel 3.3 aus der geglätteten TWF oder den Wavelet-Koeffizienten berechnete Varianz der Krümmung unterliegt ebenfalls diesen Effekten und wird durch die anzubringenden Korrekturen verfälscht. Die Varianz ist damit als globales Glättungsmaß der Linie nur wenig geeignet, wenn die Wavelet-Transformation zur Glättung der TWF genutzt wird. Allerdings ist die Aussage nicht auf die Glättung der Koordinaten mit Wavelets übertragbar.

Bei Untersuchungen mit der Krümmungsvarianz als Abbruchparameter für das Tafus-Verfahren stellte sich heraus, daß sich an Knickstellen der Linie ungünstige Punktlagebeziehungen ergeben können. Das dichte Zusammenliegen mehrere Punkte resultiert in großen Richtungswinkeldifferenzen bei kleinen Strecken zwischen den Punkten. Wenn die zu eng liegenden Punkte nicht beseitigt werden, wird die Berechnung der Krümmungsvarianz der gesamten Linie stark verfälscht, da an diesen Stellen die Krümmungen sehr groß sind. Aus diesem Grunde wird eine Krümmung, die den Betrag $\frac{\pi}{4}$ überschreitet, bei der Varianzberechnung nicht beachtet und stattdessen ein stationäres Signal angenommen.

In Abschnitt 5.5 soll trotz der voraussehbaren Mängel in den Berechnungsansätzen die Filterung der drei Verfahren mit Hilfe der Krümmungsvarianz verglichen werden.

Die Linienlänge

Als dritter möglicher Steuer- und Vergleichsparameter wurde im Abschnitt 3.3 die Linienlänge vorgestellt. Da bei der Berechnung (Abschn. 3.3.1) ebenfalls die Krümmung der (geglätteten) Linie eingeht, unterliegt auch dieser Ansatz den Auswirkungen der Korrekturen. Die Linienlänge soll wegen ihrer Korrelation mit der Krümmungsvarianz nicht als weiterer Steuerparameter in Betracht gezogen werden.

5.2 Verbesserung durch variable Koeffizientenmatrizen

Das bisherige Filterverfahren der Snakes repräsentierte einen stationären Filter, der an jeder Stelle gleich stark glättet. Der Tafus-Algorithmus glättet durch die Filterung der Krümmung bereits lokal und realisiert folglich einen instationären Filterprozeß.

Neben der Formvereinfachung von Linien ist es bei der Generalisierung erwünscht, signifikante Erkennungsmerkmale - wie z. B. die Mäander eines Flußlaufes - zu erhalten, damit sie weiterhin als visuelles Merkmal dienen. Dies kann ein instationärer bzw. ortsabhängiger Glättungsfilter realisieren, wenn er durch die örtliche Krümmung gesteuert wird. Im Folgendem werden in die Snakes- und Tafus-Gleichungen variable Koeffizientenmatrizen eingeführt, um eine ortsabhängige Formvereinfachung zu erzielen.

5.2.1 Tafus mit variabler Koeffizientenmatrix

Die Glättung mit Tafus enthält bereits eine lokale Steuerung durch die Krümmung. Trotzdem soll versucht werden, mit der von [Meier, 2002] hergeleiteten variablen, tridiagonalen Koeffizientenmatrix \mathbf{A}_T eine Verbesserung bei der Erhaltung markanter Kurvenformen zu erreichen.

Aufbau der Filtermatrix

Der Energieansatz für das Tafus-Modell bleibt der gleiche aus der Formel (4.24):

$$I[\varphi(s)] := \int_0^1 (E_{ext} + \frac{1}{2} \alpha \varphi^2 + \frac{1}{2} \beta \dot{\varphi}^2) ds. \quad (5.3)$$

Die äquivalente Eulergleichung zur Variation des obigen Funktionals ergibt sich allerdings mit den von der Bogenlänge s abhängigen variablen Parametern $\alpha = \alpha(s)$ und $\beta = \beta(s)$ zu:

$$\frac{\partial E_{ext}}{\partial \varphi} + \alpha(s) \varphi(s) - \beta(s) \ddot{\varphi}(s) - \dot{\beta}(s) \dot{\varphi}(s) = 0. \quad (5.4)$$

Der ergänzte Term der Gleichung enthält den ortsabhängigen Parameter β sowie die ortsabhängige Krümmung. Setzt man zur Probe konstante Parameter α, β ein, so ist $\dot{\beta} = 0$ und es ergibt sich die ursprüngliche Eulergleichung (4.27).

Wird die Differentialgleichung (5.4) mit finiten *Vorwärtsdifferenzen* (VD) diskretisiert, so erhält die tri-diagonale Matrix folgende Struktur:

$$\mathbf{A}_T^{VD} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 + \beta_2 & -\beta_2 & 0 & 0 & \dots \\ -\beta_2 & \alpha_2 + \beta_2 + \beta_3 & -\beta_3 & 0 & \\ 0 & -\beta_3 & \alpha_3 + \beta_3 + \beta_4 & -\beta_4 & \\ 0 & 0 & -\beta_4 & \alpha_4 + \beta_4 + \beta_5 & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Für eine Umsetzung im Programm ist die folgende Schreibweise sinnvoller:

$$\text{Hauptdiagonale: } a_i = \alpha_i + \beta_i + \beta_{i+1}, \quad (5.6)$$

$$\text{Nebendiagonale: } b_i = -\beta_{i+1}. \quad (5.7)$$

Die Matrix ist für die Diskretisierung mit Vorwärtsdifferenzen symmetrisch. Wird hingegen mit Rückwärtsdifferenzen gerechnet, so ist \mathbf{A}_T asymmetrisch. Dies hat zur Folge, daß \mathbf{A}_T für die Invertierung schlecht zerlegbar ist und bei der Filterung eine Phasenverschiebungen verursacht.

Ansätze zur Steuerung der Parameter

Bevor auf die Steuerung der Parameter eingegangen wird, soll zunächst eine maßstabstreu Filterung realisiert werden. Bildet man die Summe einer Zeile i der Matrix \mathbf{A}_T^{VD} , so ergibt sich wie im bisherigen Tafus-Modell die Abhängigkeit der Maßstabstreu vom Parameter α :

$$\sum_j c_{i,j} = -\beta_i + \alpha_i + \beta_i + \beta_{i+1} - \beta_{i+1} = \alpha_i. \quad (5.8)$$

Die Filterung wird mit der Festlegung $\alpha = 1$ maßstabstreu und nur noch der Parameter β ist frei wählbar. Einem Vorschlag von [Meier, 2002] folgend, wird dieser mit:

$$\beta = \beta_0 |\dot{\varphi}|^2 \quad (5.9)$$

5.2.2 VARIABLE KOEFFIZIENTENMATRIZEN - SNAKES

angesetzt, wobei β_0 als Steuerparameter für die Stärke der Glättung dient.

Durch die Gewichtung mit der Krümmung wird bei variablen Koeffizienten - in wenigen Iterationsschritten - eine stärkere Glättung von gering kurvigen Abschnitten erreicht. Bei konstanten Koeffizienten muß demnach öfters iteriert werden, um den gleichen Glättungsgrad¹ zu erhalten. Dabei werden durch die zusätzlichen Iterationen auch die Kurven stärker geglättet, welches mit dem neuen Ansatz vermieden werden soll.

Um den im Abschnitt 5.1 beschriebenen Welleneffekt beim Tafus-Verfahren auch für variable Koeffizienten zu verhindern, ist bei der Umsetzung im Programm die Restriktion $\beta_i = \beta_0 \phi_i > 0.5$ einzuhalten.

Für das Tafus-Modell mit dem Ansatz $\frac{\partial E_{ext}}{\partial \phi} = -\phi$ nach [Borkowski, 2002], ergibt sich das zu lösende Gleichungssystem:

$$\phi^t = \phi^{t-1} + \mathbf{A}_T^{-1} \phi^{t-1}, \quad (5.10)$$

in dem \mathbf{A}_T die von der Krümmung abhängige, symmetrische Koeffizientenmatrix darstellt:

$$\mathbf{A}_T = \mathbf{A}_T^{VD} (\alpha = 1, \beta_i = \beta_i^0 \Delta \phi_i^2).$$

Damit wird die Glättung mehrfach durch die lokale Krümmung gesteuert. Zum einen wird sie bei der Berechnung des Parameters β benutzt und zum anderen bestimmt sie die Größe der Verschiebung als zu glättendes Eingangssignal.

Eine Gegenüberstellung der Filterung mit variablen und konstanten Koeffizienten scheint kompliziert. Vergleicht man nach einer bestimmten Anzahl an Iterationen, so ist die Linie bei Filterung mit variabler Koeffizientenmatrix stärker geglättet. Demnach müßten Linien mit gleicher Krümmungsvarianz gegenüber gestellt werden. Dies ist aber problematisch, weil die Berechnung der Varianz mit einer Schranke für maximale Krümmungen erfolgt (siehe Abschnitt 5.1). Vergleicht man die Ergebnisse gleicher Krümmungsvarianz, dann stimmen die Varianzwerte für die Tafus nur näherungsweise überein.

In der Abbildung 5.4 ist die Formerhaltung durch weniger Iterationsschritte gut zu erkennen und stellt aus Sicht der Generalisierung eine Verbesserung des Glättungsalgorithmus dar. Nachteilig erweist sich der erhöhte Rechenaufwand, der aus der Aufstellung und Invertierung der tridiagonale Matrix für jeden Iterationsschritt resultiert.

5.2.2 Snakes mit variabler Koeffizientenmatrix

Für die Snakes soll ebenfalls eine den Leitsätzen der Generalisierung besser entsprechende, also formerhaltende Glättung mit Hilfe variabler Koeffizienten getestet werden.

Aufbau der Filtermatrix

Das Energieintegral ist dasselbe wie bei den ursprünglichen Snakes:

$$E_{int} = \frac{1}{2} \alpha \cdot \left| \frac{dg}{ds} \right|^2 + \frac{1}{2} \beta \cdot \left| \frac{d^2g}{ds^2} \right|^2, \quad (5.11)$$

¹Der Glättungsgrad wird in den Experimenten durch die Krümmungsvarianz der Linie ausgedrückt

5.2.2 VARIABLE KOEFFIZIENTENMATRIZEN - SNAKES

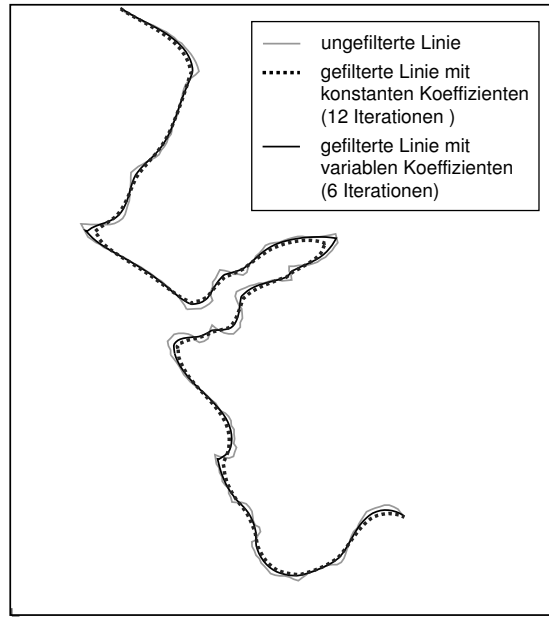


Abbildung 5.4: Tafus-Glättung mit variabler und konstanter Koeffizientenmatrix.

Die Glättung wurde iterativ mit $\alpha = 1$ und $\beta_0 = 2$ durchgeführt und nach dem Erreichen einer festgelegten Krümmungsvarianz abgebrochen.

mit:

$$g(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}.$$

Unter der Annahme, daß $x = x(s)$, $y = y(s)$, $\beta = \beta(s)$ und $\alpha = \alpha(s)$ wird von [Borkowski und Meier, 1999] folgende Eulergleichung für die Koordinatenrichtung x berechnet, wobei x_s die einmalige Ableitung von x nach der Bogenlänge bezeichnet:

$$\frac{\partial E_{ext}}{\partial x} - \alpha x_{ss} + \beta x_{ssss} - \alpha_s x_s + \beta_{ss} x_{ss} + 2\beta_s z_{sss} = 0. \quad (5.12)$$

Wird diese nach *Rückwärtsdifferenzen* diskretisiert, ergibt sich aus (5.12) die Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 = & E_x^{ext}(s_i) + \alpha_{i-1}(x_i - x_{i-1}) - \alpha_i(x_{i+1} - x_i) \\ & + \beta_{i-1}(-x_{i+1} + 4x_i - 5x_{i-1} + 2x_{i-2}) \\ & + \beta_i(x_{i+2} - 4x_{i+1} + 4x_i - x_{i-2}) \\ & + \beta_{i+1}(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}), \end{aligned} \quad (5.13)$$

welche eine asymmetrische Matrix \mathbf{A}_P zur Folge hat. Diese ist schlecht zerlegbar und verursacht Phasenverschiebungen bei der Signalfilterung. In der von [Kass et al., 1987] angegebenen Lösung wird die Gleichung (5.11) erst diskretisiert und dann die Eulergleichungen (5.14) hergeleitet. Hierdurch ergibt sich eine symmetrische Koeffizientenmatrix.

$$\begin{aligned} 0 = & E_x^{ext}(s_i) + \alpha_i(x_i - x_{i-1}) - \alpha_{i+1}(x_{i+1} - x_i) \\ & + \beta_{i-1}(x_{i-2} - 2x_{i-1} + x_i) \\ & - 2\beta_i(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}) \\ & + \beta_{i+1}(x_i - 2x_{i+1} + x_{i+2}) \end{aligned} \quad (5.14)$$

5.2.2 VARIABLE KOEFFIZIENTENMATRIZEN - SNAKES

Für die Annahme, daß α konstant und β variabel ist, erhält die aus Gleichung (5.14) entstandene Matrix \mathbf{A}_P folgende Form:

$$\mathbf{A}_P^K = \begin{bmatrix} a_1 & -b_1^R & c_1^R & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha - 2\beta_1 - 2\beta_2 & 2\alpha + \beta_1 + 4\beta_2 + \beta_3 & -\alpha - 2\beta_2 - 2\beta_3 & \beta_3 & 0 & \\ \beta_2 & -\alpha - 2\beta_2 - 2\beta_3 & 2\alpha + \beta_2 + 4\beta_3 + \beta_4 & -\alpha - 2\beta_3 - 2\beta_4 & \beta_4 & \\ 0 & \beta_3 & -\alpha - 2\beta_3 - 2\beta_4 & 2\alpha + \beta_3 + 4\beta_4 + \beta_5 & -\alpha - 2\beta_4 - 2\beta_5 & \\ 0 & 0 & c_5^L & b_5^L & a_5 & \\ \vdots & & & & & \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Für die Umsetzung in einem Programm ist diese Notation besser:

$$\begin{aligned} \text{Hauptdiagonale:} & \quad a_i = 2\alpha + \beta_{i-1} + 4\beta_i + \beta_{i+1} \\ \text{linke innere Nebendiagonale:} & \quad b_i^L = -\alpha - 2\beta_{i-1} - 2\beta_i \\ \text{rechte innere Nebendiagonale:} & \quad b_i^R = -\alpha - 2\beta_i - 2\beta_{i+1} \\ \text{linke äußere Nebendiagonale:} & \quad c_i^L = \beta_{i-1} \\ \text{rechte äußere Nebendiagonale:} & \quad c_i^R = \beta_{i+1}. \end{aligned}$$

Bei der Programmierung ist zu beachten, daß sich das erste und letzte Hauptdiagonalelement nicht berechnen lassen. In der vorliegenden Realisierung wurden diese durch die Hauptdiagonalelemente der zweiten bzw. vorletzten Zeile ersetzt.

Ansatz zur Steuerung des Parameters β

Wie schon bei der Aufstellung der Matrix \mathbf{A}_P angegeben, wird der Parameter α als Konstante mit dem Wert $\alpha = 1$ festgelegt. Folglich ist nur noch β mit einem formerhaltenden Ansatz zu steuern. Bei den Tafus führte die Einbeziehung der Krümmung zu verbesserten Glättungsergebnissen und soll deshalb wieder benutzt werden. Getestet wurde die zwei Ansätze:

$$\beta_i = \beta_0 |\phi_i|^2 \quad (5.16)$$

und

$$\beta_i = \beta_0 \cos^{30} \left| \frac{\phi_i}{\pi/2} \right| \quad \text{mit:} \quad \left| \frac{\phi_i}{\pi/2} \right| \leq 1. \quad (5.17)$$

Bei Ansatz (5.16) bekommen kurvige Stellen mit großer Krümmung ein großes β zugeordnet und müßten demnach stärker geglättet werden. Durch die Invertierung der skalierten Matrix tritt dies aber nicht auf. Es werden Stellen mit starker Krümmung gegenüber der Filterung mit einem konstanten Parameter β nur geringfügig besser erhalten. Für Kurvenformen mit geringer Krümmung funktioniert die Anpassung an die ursprüngliche Linie verhältnismäßig gut. Durch Verwendung des Ansatz (5.17) bekommen große Krümmungen ein kleines β zugeordnet. In der Folge paßt sich die geglättete Linie bei kleinen Windungen besser an den ursprünglichen Verlauf an. In der Abbildung 5.5 sind die Unterschiede zwischen den Ansätzen in der Berechnung von β zu sehen. Um bei benachbarten Punkten starke Glättungsunterschiede zu verhindern, wurde die Krümmung vorab mit einem 3-Punkt-Mittelwertfilter geglättet.

Für kleine Krümmungswerte werden mit dem ersten Ansatz kleine β berechnet. Dies resultiert in einer

5.2.2 VARIABLE KOEFFIZIENTENMATRIZEN - SNAKES

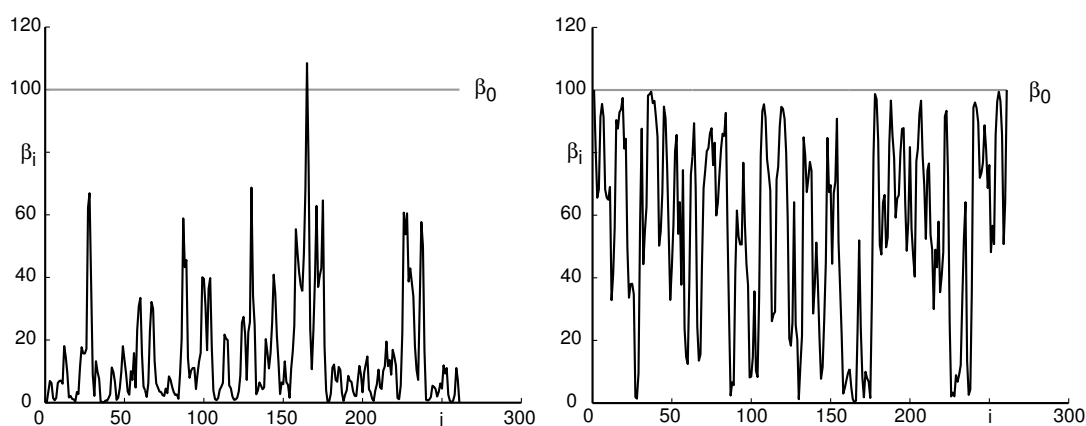


Abbildung 5.5: Variation des Parameters β bei den Snakes.

Links: Zuordnung großer β bei großen Krümmungen - Ansatz: (5.16). *Rechts:* Zuordnung kleiner β bei großen Krümmungen - Ansatz: (5.17).

schlecht konditionierten oder gar singulären Matrix \mathbf{A}_P . Aus diesem Grund wird die Matrix zeilenweise skaliert oder zum Hauptdiagonalelement $A_{i,i}$ der Wert $\lambda = 1$ addiert, wenn die Bedingung:

$$\sum_{j=1}^n A_{i,j} \leq 0.001$$

erfüllt wird, also die Summe der Elemente einer Zeile i von \mathbf{A}_P klein ist.

Bei der Umsetzung des zweiten Ansatzes ist neben der zeilenweisen Skalierung auch die Maßstabskorrektur der Randkoeffizienten vorzunehmen (vgl. Abschnitt 4.4.2). Allerdings wird nicht mehr das Hauptdiagonalelement $A_{3,3}^P$ zum Skalieren verwendet, sondern das größte Hauptdiagonalelement von $A_{i,i}^P, i \in \mathbf{Z}\{6 \dots 10\}$, weil die Matrixelemente unterschiedliche Beträge durch die Gewichtung mit der Krümmung erhalten.

Benutzt man in beiden Ansätzen ein großes β mit einmaligem Glättungsprozeß, dann stellt sich der gewünschte Effekt der Formerhaltung ein. Filtert man hingegen iterativ mit der Krümmungsvarianz als Abbruchparameter, so sind für $\beta_0 > 1$ mehr Iterationen nötig, um die gleiche Krümmungsvarianz zu erreichen. Beim Vergleich der Ergebnisse mit der Formvereinfachung bei konstanten Parametern wird die Kurvenform nicht besser erhalten. Zum Teil ist die Glättung sogar schlechter, da mit einem konstantem Parameter weniger Iterationen durchgeführt werden. Wird der Vergleich zwischen $\beta = 1 = const$ und $\beta_0 = 1$ durchgeführt, dann ist dieselbe Anzahl an Iterationen notwendig und die Ergebnisse unterscheiden sich kaum voneinander.

Die Ansätze (5.16) und (5.17) sind demnach nur sinnvoll, wenn in maximal drei Iterationsschritten und mit *großen* Parameterwerten $\beta \geq 50$ geglättet werden soll. Hierbei ist der Ansatz (5.17) vorzuziehen, da er auch bei kleinen Windungen die Linienform besser erhält² (vgl. Abb.5.6). Desweiteren fällt bei wenigen Iterationen die zusätzliche Berechnungszeit für den Aufbau der Matrix und deren Invertierung weniger ins Gewicht.

²Die Auswertung im Abschnitt 5.5 enthält insgesamt eine andere Empfehlung

5.3 LÖSCHEN VON PUNKTEN

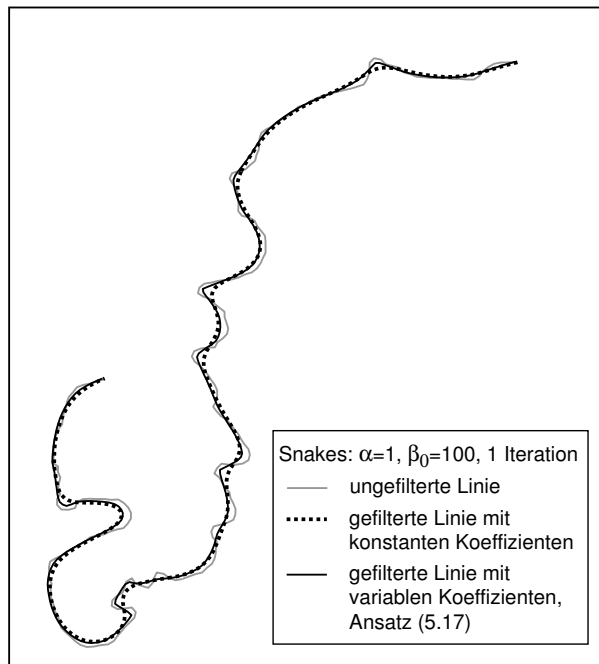


Abbildung 5.6: Snakes-Glättung mit variabler Koeffizientenmatrix.

5.3 Löschen von Punkten

Der Tafus-Algorithmus macht das Löschen von Punkten in einer Linie notwendig, da beim Glätten die Punkte an den Knickstellen so verschoben werden, daß ungünstige Geometrien entstehen. Dies äußert sich in dicht beieinanderliegenden Punkten mit großen Differenzen zwischen den Tangentenrichtungen bzw. großen Krümmungsbeträgen (vgl. Bild 5.7). Die Restriktion im Tafus-Verfahren, den große Krümmungen ($\phi > \pi$) kleine Krümmungsbeträge zuzuweisen, führt allerdings nur zu geringen Punktverschiebungen. Die Linie wird somit selten zerstört.

Die ungünstigen Geometrien wirken sich indes nachteilig auf iterative Glättungsverfahren aus, wenn die Krümmungsvarianz als Abbruchparameter verwendet wird. Die Verschiebung von immer mehr Punkten zu den Knickstellen führt zum Ansteigen der Krümmungsvarianz in höheren Iterationsschritten, obwohl die Linie vereinfacht wird. Es werden lokal geprägte Varianzen berechnet, die nicht mehr ein Glättungsmaß der *gesamten* Linie darstellen.

Zur Lösung des Problems werden eng aneinanderliegende Punkte gelöscht. Als Kriterium dient der Abstand s_i zwischen zwei Punkten. Fällt dieser unter einen Mindestabstand, z. B. $d_{min} = \frac{1}{5} s_0$ des Punktabstandes s_0 in der ursprünglichen Linie, so wird der Punkt entfernt.

Nachteil des Verfahrens ist, daß die Knickstellen der Linie nicht mehr als Erkennungsmerkmale erhalten werden. Dies soll durch die nachfolgende Modifikation geändert werden.

5.4 SEGMENTIERUNG DER LINIE

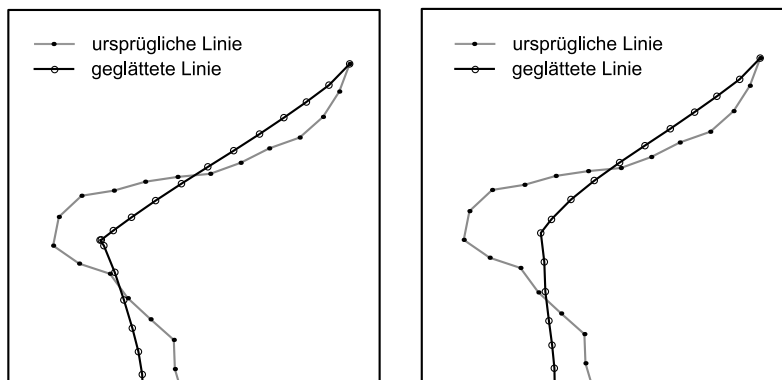


Abbildung 5.7: Löschen von Punkten an Problemstellen für Tafus.

Im linken Bild ist das Zusammenfallen von Punkten zu erkennen (Tafus-Algorithmus mit $i = 10$ Iterationen und den Parametern $\alpha = \beta = 1$). Im rechten Bild wurden Punkte mit zu geringem Abstand s_i eliminiert (4 Punkte).

5.4 Erhaltung charakteristischer Kurvenpunkte durch Segmentierung

Bei der Glättung mit Tafus ist es notwendig, Problemstellen eines iterativen Algorithmus durch Löschen von Punkten zu beseitigen. Die Linien werden dadurch glatter, und erhaltenswerte Knicke in ihrem Verlauf verschwinden. Benutzt man Snakes mit konstanten Parametern, entsteht ebenfalls das Problem “zu glatter“ Linien. Um die Knickstellen als Erkennungsmerkmal zu erhalten, wird neben dem Ansatz variabler Koeffizientenmatrizen eine Segmentierung der Linie in diesen Punkten vorgeschlagen.

Ein Vorteil der Segmentierung besteht darin, daß für die einzelnen Segmente unterschiedlich starke Glättungen durch unterschiedliche Parameterwahl von β realisiert werden können. [Burghardt, 2002a] segmentiert ausschließlich zu diesem Zweck und steuert die Glättung mit α und β für jeden Linienabschnitt nach dessen *Kurvigkeit*. Dies soll hier aber nicht angewandt werden, da der Ansatz mit variablen Koeffizientenmatrizen das selbe Ziel verfolgt.

Ansatzpunkt für die Erhaltung von Knickpunkten durch Segmentierung ist erneut die Krümmung. Eine Linie wird dann in zwei Elemente geteilt, wenn die Richtungsänderung $\delta\phi = \phi$ in einem Punkt einen rechten Winkel erreicht bzw. diesen übersteigt:

$$|\phi_i| \geq \frac{\pi}{2}. \quad (5.18)$$

Alternativ kann auch ein Grenzwert von $\frac{\pi}{3}$ gewählt werden, welcher besonders bei glatten Linienverläufen sinnvoll ist. Häufig führt dies jedoch zu ungeeigneten Segmenten. Interessanterweise verkürzen viele kleine Segmente die Berechnungszeit bei den Snakes, da nur kleine Matrizen \mathbf{A}_p statt einer großen zu invertieren sind. Im Bild 5.8 ist ein Beispiel für die Erhaltung charakteristischer Linienpunkte durch Segmentierung dargestellt.

Bei der Umsetzung sollte auf eine gewisse Mindestanzahl an Punkten pro Abschnitt geachtet werden. Dies vermeidet Segmentierungen bei fehlerhaft digitalisierten Linienverläufen (vgl. im ersten Kapitel das Beispiel “Louisiana’s Gulf Coast“). Desweiteren verhindert es Probleme bei der Filterung mit klein

5.5 VERGLEICH DER GLÄTTUNGSVERFAHREN

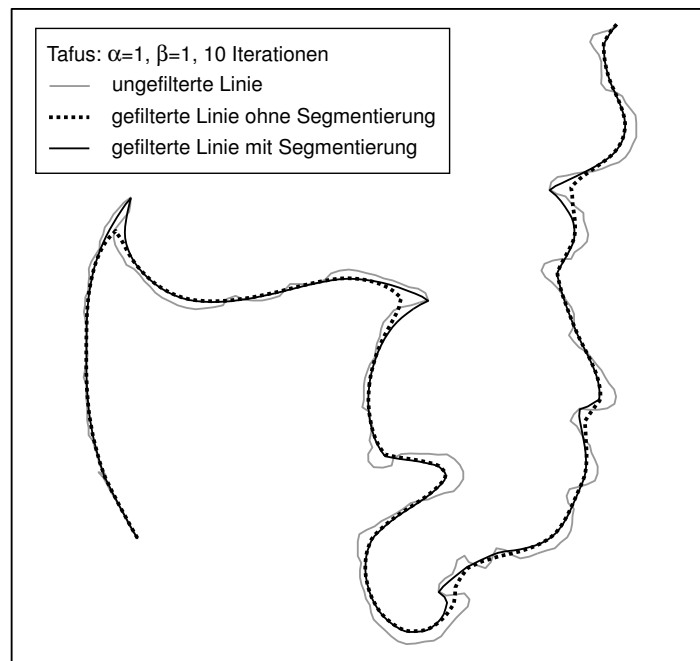


Abbildung 5.8: Glättung mit Segmentierung der Linie.

Zu eng liegende Punkte wurden gelöscht und mit der Segmentierungsbedingung $|\phi| \geq \frac{\pi}{3}$ bleiben markante Knicke der Linie erhalten.

dimensionierten Koeffizientenmatrizen, wenn beim Snakes-Algorithmus die Spiegelung der Linienendpunkte benutzt wird. Die Segmentierung setzt voraus, daß Anfangs- und Endpunkt des Abschnittes wieder die annähernd gleiche Position haben.

5.5 Vergleich der Glättungsverfahren

Abschließend werden die Ergebnisse der drei Glättungsverfahren gegenübergestellt. Das bestimmende Kriterium für die Vergleichbarkeit von Linien ist die Krümmungsvarianz als Glättungsmaß. Als Abbruchparameter für die iterative Linienglättung mit den energieminimierenden Verfahren wurde die extrapolierte Krümmungsvarianz aus Abschnitt 3.3.3 / E 1. der Wavelet-Glättung genutzt.

Die Ergebnisse sind jedoch nicht unmittelbar vergleichbar, da in der Krümmungsberechnung bei der Wavelet-Glättung systematische Fehler auftreten. Auch bei den Tafus wird eine Korrektur im Wertebereich der Krümmung vorgenommen.

Die Bewertung der Glättungsergebnisse erfolgte rein visuell und ist subjektiv geprägt. Aus diesem Grunde wurden Linien unterschiedlicher Art mit den genannten Verfahren gefiltert und eine Rangfolge der Ergebnisse pro Linie erstellt. Anschließend wurde mit Hilfe aller Rangfolgen eine durchschnittliche Wertung der Glättungsverfahrens vorgenommen. Für zwei Beispiele kann eine Auswahl von Glättungsergebnissen im Anhang B betrachtet werden. Es ist zu erkennen, daß die Ergebnisse zum Teil nur geringfügig voneinander abweichen. Deshalb wurde bei der Bewertung hauptsächlich darauf geachtet, ob spezielle Details der Linie noch vorhanden sind, welche die Orientierung im Kartenblatt erleichtern.

5.5 VERGLEICH DER GLÄTTUNGSVERFAHREN

Nach dem Vergleich der geglätteten Linien lassen sich folgende Aussagen zu den Verfahren treffen:

- Die Glättungsergebnisse der Wavelets und der energieminimierenden Verfahren sind nicht vergleichbar, da es Probleme bei der Wiederherstellung der Linie aus der Tangentenwinkeldarstellung gibt. Nach Anwendung der Drehstreckung hat die mit Wavelets geglättete Linie nicht mehr die ursprüngliche Lage und besitzt nur noch geringe Ähnlichkeit mit der ursprünglichen Linie. Bei komplizierten Linien mit starken Richtungswechseln kann durch extreme Glättung die Rekonstruktion scheitern.
- Nach mehreren Iterationen ($i > 5$) unterscheiden sich die Ergebnisse zwischen den Algorithmen mit konstanten Parametern und variablen Parametern nur wenig voneinander. Somit wird eine bessere Erhaltung der Linienform nicht erreicht. Dies gilt sowohl für die Snakes als auch für die Tafus.
- Die Algorithmen mit konstanten Koeffizientenmatrizen - ohne Anwendung der Segmentierung - sind schneller, da die Aufstellung und Invertierung der Matrix nur einmal erfolgen muß.
- Wird bei sehr kurvigen Linien mit vielen Punkten (≥ 100) die Segmentierung verwendet, sind die Tafus-Algorithmen nicht schneller als die Snakes-Verfahren. Ursache ist die schnellere Invertierung mehrerer kleiner Matrizen im Programmsystem MATLAB, als die einer großen. Die Zeit eines Snakes-Glättungsschrittes mit Segmentierung kann bis zu 1/5 der Zeit ohne Segmentierung betragen. Aus diesem Grund sollte bei Snakes und Tafus immer segmentiert werden.
- Bei den Snakes kann der Parameter β so gewählt werden, daß ein bestimmter Glättungsgrad in nur einem Iterationsschritt erreicht werden kann und die Filterung somit den geringsten Zeitbedarf aufweist. Allerdings waren die Glättungsergebnisse bei den Tests nie besser als bei einer iterativen Glättung. Desweiteren lassen sich, gerade bei Anwendung der Segmentierung, starke Formvereinfachungen durch Vorgabe einer geringen Krümmungsvarianz nicht immer in einem Schritt erreichen. Eine Glättung in nur einem Durchlauf ist demnach nicht empfehlenswert.
- Bei Nutzung der Segmentierung sind mindestens zwei Iterationen auszuführen. Dadurch werden Segmentierungstellen des ersten Schrittes zum Teil wieder geglättet, wenn keine starke Richtungsänderung der Linie erfolgt.
- Der Ansatz (5.17) des Snakes Algorithmus mit variablen Parametern liefert im allgemeinen schlechtere Ergebnisse als andere Algorithmen und sollte deswegen nicht angewendet werden.

Da sich die Glättungsergebnisse nur wenig voneinander unterscheiden und für verschiedene Linien mal die Snakes und mal die Tafus besser glätten, ist es schwer einen Algorithmus zu empfehlen. In jedem Fall ist es zweckmäßig die Segmentierung zu nutzen. Entstehen dabei Segmente mit weniger als 100 Punkten und soll stark geglättet werden, dann sollte der Snakes Algorithmus mit konstanten Koeffizienten oder der mit variablen Koeffizienten und dem Ansatz (5.16) verwendet werden. Günstig wirkt sich die Festlegung des Snakes-Parameters $\beta < 100$ aus.

Sind sehr starke Formvereinfachungen das Ziel, dann wird der Snakes-Ansatz (5.16) mit variablen Koeffizienten und $\beta_0 = 100$ empfohlen. Dabei ist der Grenzwert der Krümmung für die Segmentierung der

5.5 VERGLEICH DER GLÄTTUNGSVERFAHREN

Linie so zu wählen, daß nur die markantesten Knickpunkte erhalten bleiben.

Im allgemeinen sind die Parameterwerte $\alpha = 1$ und $\beta = 1$ gute Startwerte für eine mittlere Glättung mit den iterativen Snakes- und Tafus-Algorithmen. Bei geringer Formvereinfachung ist das Tafus-Verfahren vorzuziehen, da der Ansatz (4.63) eine von der örtlichen Krümmung abhängige Glättung realisiert.

Diese Empfehlungen gelten nur für eine separat durchgeführte Formvereinfachung von Linien. Da die Glättung aber im Kontext mit den anderen Generalisierungsprozessen zu sehen ist, muß überprüft werden, ob die Empfehlungen auch für eine Kombination von Glättung und Verdrängung Bestand haben.

6 Verdrängung und Glättung mit Snakes und Tafus

Als Mittel der kartographischen Generalisierung hat die *Verdrängung* die Aufgabe, dicht beieinanderliegende Objekte oder Teile von Objekten optisch zu trennen. Dabei wird auf den Mindestabstand von 0.2 mm verwiesen, der eingehalten werden muß, um das "Zusammenfließen" von Objekten in der Papierkarte zu verhindern. Die Glättung hingegen hat das Ziel ein linien- oder flächenhaftes Objekt in seiner Form zu vereinfachen. Wird im Prozeß der Generalisierung eine starke Glättung von zwei dicht nebeneinanderliegenden Linien vorgenommen, so können sich diese nach der Glättung überlagern. Die entstandene Konfliktsituation muß mittels Verdrängung beseitigen werden. Die Anwendung der Verdrängung ist ebenfalls erforderlich, wenn sich eine stark gewundene Linie nach iterativen Glättung mit Segmentierung selbst schneidet. Eine solche Situation ist im linken Bild von Abbildung 6.1 dargestellt.

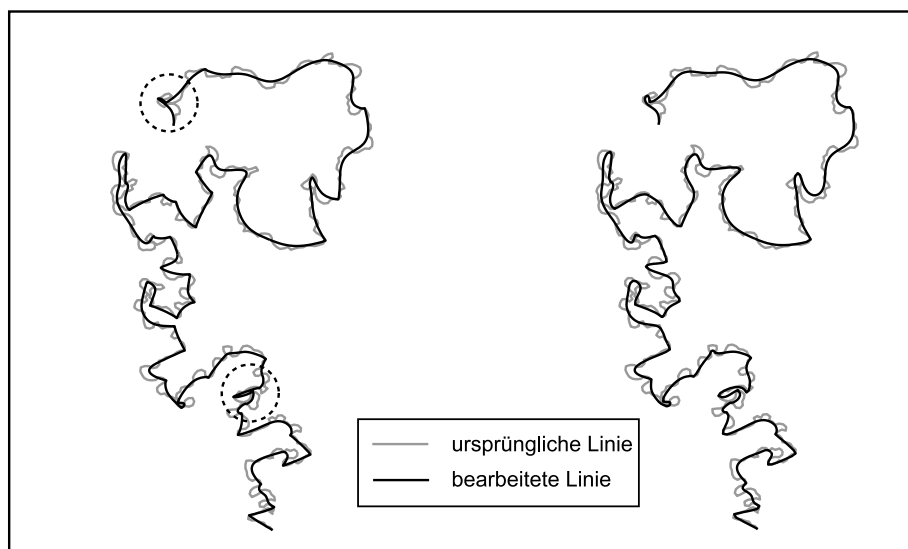


Abbildung 6.1: Überlagerung einer Linie nach iterativer Glättung.

Links sind die Überschneidungen bei einer stark gewundenen Linie zu sehen (siehe Markierungen). Diese Situation entstand nach iterativer Glättung mit Segmentierung. Die Formvereinfachung der Linie im rechten Bild wurde hingegen mit einem kombinierten Algorithmus aus Verdrängung und Glättung vorgenommen.

Sowohl von [Burghardt, 2001] als auch von [Bader, 2001] werden Ansätze zur kartographischen Verdrängung mittels Snakes vorgestellt. Da das Snakes-Modell auch in dieser Arbeit verwendet wird, erscheint es sinnvoll, beide Snakes-basierte Algorithmen zu kombinieren oder zumindest wechselseitig ablaufen zu lassen, um die genannten Überlagerungsprobleme zu lösen.

Zu Beginn des Kapitels werden die Snakes- und Tafus-Modelle der Verdrängung beschrieben. Darauf aufbauend folgen die Ansätze für die Kombinationen der Verfahren. Ein weiterer Abschnitt beschäftigt sich mit der Realisierung und Auswertung der Untersuchungsergebnisse, gefolgt von Empfehlungen für weitere Arbeiten.

6.1 Die Verdrängung mit Snakes und Tafus

6.1.1 Prinzip der Energieminimierung bei der Verdrängung

Wird der Maßstab einer Karte verändert, so sind für die gute Erkennbarkeit von Kartenobjekten deren Signaturgrößen anzupassen. Dadurch kann es, wie bei der Glättung von Linien, zu einer Überdeckung der Objektsignaturen kommen. Bei geometrischer Betrachtung von überlagerten Objekten läßt sich aus den Abständen eine Konfliktennergie berechnen. Diese gibt die Größe der Punktverschiebung an, welche notwendig ist, um den graphischen Konflikt aufzulösen. Die graphischen Konflikte haben folgende Merkmale:

- (1) Sie treten häufig an verschiedenen Stellen einer Linie auf.
- (2) Es sind oft mehr als zwei Objekte beteiligt.
- (3) Ihre Wirkungen erfolgt in verschiedene Richtungen.

Aufgrund der genannten Eigenschaften ist eine ausgleichende Verdrängung erforderlich. Diese muß die Konfliktennergie einer Linie insgesamt - also nicht nur in eine Richtung - minimieren. Bei der Auflösung der Überlagerungssituation ist die Beibehaltung der Liniengestalt ein zweiter wichtiger Aspekt. Es ist demnach nicht nur auf die Minimierung der Konfliktennergie, sondern auch auf eine geringe Verformungsenergie zu achten.

Angewendet auf das Modell der Snakes wird eine innere - *formerhaltende* - Energie E_{int} und eine äußere - *verdrängende* - Energie E_{ext} definiert. In Analogie zum glättenden Modell der Snakes ist schließlich die Gesamtenergie der Linie, bestehend aus innerer und äußerer Energie, zu minimieren:

$$E_{Snake} = \int_0^1 (E_{ext} + E_{int}) ds \rightarrow Min. \quad (6.1)$$

Bei Betrachtung der Gleichung ergeben sich zwei Wege zur Lösung des Verdrängungsproblems und zur Erhaltung einer minimalen Gesamtenergie. Die erste Möglichkeit besteht darin, daß die Konfliktennergie Null wird und nur noch die Verformungsenergie existiert. Bei der zweiten Variante sind die Beträge der Energien gleich groß und haben entgegengesetzte Vorzeichen. Somit wird die Summe der Energien Null. Das Ziel der Verdrängung ist es, iterativ einen der beiden Energiezustände zu erreichen. Eine Darstellung für das genannte Prinzip der Energieminimierung ist in der Abbildung 6.2 wiedergegeben.

6.1.2 VERDRÄNGUNGSMODELL DER SNAKES

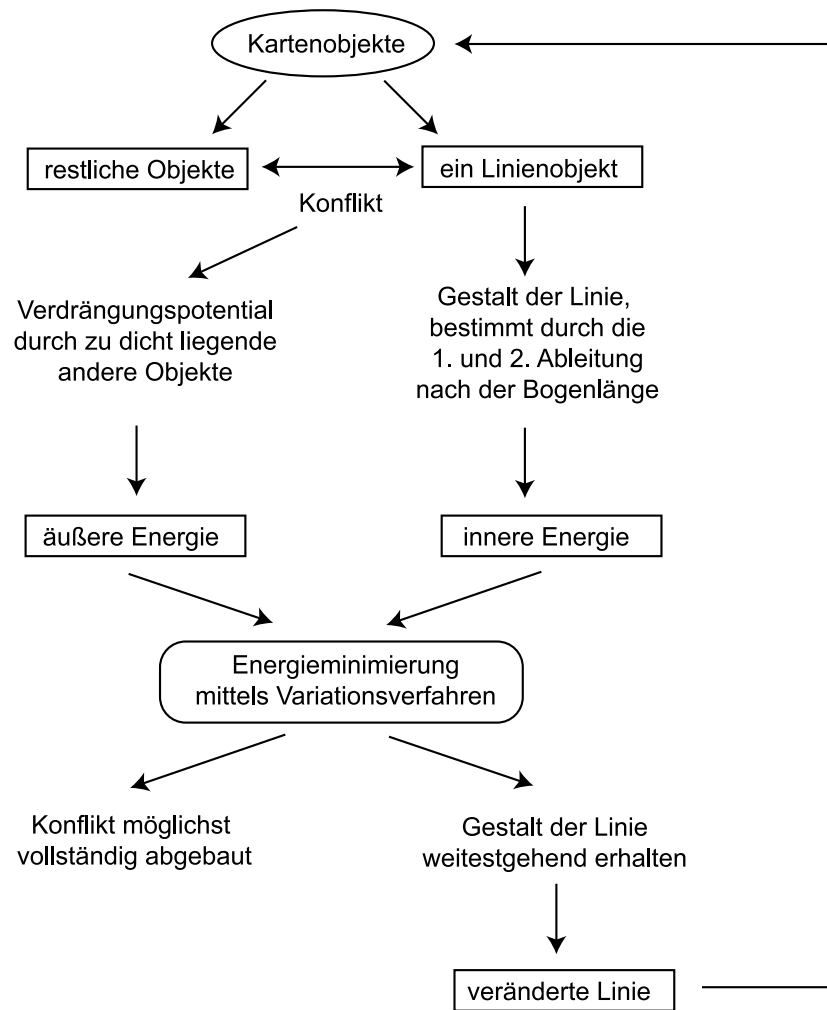


Abbildung 6.2: Schema zur Linienverdrängung mittels Energieminimierung - verändert nach [Burghardt, 2001].

6.1.2 Das Snakes- und das Tafus-Modell für die Verdrängung

Snakes-Verdrängungsmodell

Wie bereits bei den formvereinfachenden Snakes wird die Parameterform (Gleichung (6.2)) der Linie betrachtet. Es erfolgt eine getrennte Behandlung der beiden Koordinatenrichtungen, wobei der Parameter s die Bogenlänge der Linie repräsentiert.

$$v(s) = \begin{bmatrix} x(s) \\ y(s) \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

Das Snakes - Energieintegral für die zu glättende Funktion g stellt sich folgendermaßen dar:

$$E_{Snake} = \int_0^1 (E_{ext} + E_{int}) ds = \int_0^1 \left(E_{ext} + \frac{\alpha}{2} \left| \frac{dg}{ds} \right|^2 + \frac{\beta}{2} \left| \frac{d^2g}{ds^2} \right|^2 \right) ds. \quad (6.3)$$

Laut vorigem Abschnitt wird die innere Energie benutzt, um die charakteristischen Formeigenschaften der Linie zu erhalten. Das zu glättenden bzw. zu minimierende Signal g wird demnach durch die Verformung der Linie:

$$g = v_0 - v_{disp} \quad (6.4)$$

6.1.2 VERDRÄNGUNGSMODELL DER TAFUS

ersetzt, die sich aus der Differenz zwischen der verdrängten Linie v_{disp} und der ursprünglichen Linie v_0 berechnet. Das Energieintegral lautet nach Einsetzen von Gleichung (6.4):

$$E_{Snake} = \int_0^1 \left(E_{ext} + \frac{\alpha}{2} |(v_0 - v_{disp})_s|^2 + \frac{\beta}{2} |(v_0 - v_{disp})_{ss}|^2 \right) ds, \quad (6.5)$$

mit den einfach bzw. doppelt nach der Bogenlänge s differenzierten Koordinatendifferenzen.

Um die Minimierung der Snakes-Energie numerisch zu realisieren, wird das *Variationsverfahren* wie in Abschnitt 4.2 nach [Kass et al., 1987] verwendet. Nach Festlegung der Randwerte kann das Variationsproblem (6.5) der zwei Koordinatenfunktionen $[x(s), y(s)]$ und deren Ableitungen in die entsprechenden Eulergleichungen überführt werden. Es ergeben sich zwei Differentialgleichungen 4. Ordnung:

$$\frac{\partial E_{ext}}{\partial x} - \alpha(x_{ss} - x_{ss}^0) + \beta(x_{ssss} - x_{ssss}^0) = 0, \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial E_{ext}}{\partial y} - \alpha(y_{ss} - y_{ss}^0) + \beta(y_{ssss} - y_{ssss}^0) = 0. \quad (6.7)$$

Deren Diskretisierung mit *Finiten Differenzen* führt auf die folgenden linearen Ersatzsysteme:

$$\mathbf{A}_P(\mathbf{x}^t - \mathbf{x}^0) + \mathbf{E}_x^{ext}(\mathbf{x}^t, \mathbf{y}^t) = \mathbf{0} \quad \text{und:} \quad \mathbf{A}_P(\mathbf{y}^t - \mathbf{y}^0) + \mathbf{E}_y^{ext}(\mathbf{x}^t, \mathbf{y}^t) = \mathbf{0}. \quad (6.8)$$

Die pentadiagonale Matrix \mathbf{A}_P ist wie bei den glättenden Snakes aufgebaut und besitzt mit den Koeffizienten:

$$a := 2\alpha + 6\beta, \quad b := -\alpha - 4\beta \quad \text{und} \quad c := \beta \quad (6.9)$$

die Form:

$$\mathbf{A}_P = \begin{bmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b & a & b & c & 0 & 0 & \\ c & b & a & b & c & 0 & \\ 0 & c & b & a & b & c & \\ 0 & 0 & c & b & a & b & \\ \vdots & & & & & & \end{bmatrix}. \quad (6.10)$$

Wird unter der Annahme der Konvergenz eine iterative Lösung für das System vorgeschlagen, so erhält das Gleichungssystem, umgestellt nach der Lösung des Schrittes t , folgende Struktur:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^t &= \mathbf{x}^0 + \mathbf{A}_P^{-1}(\mathbf{x}^{t-1} - \mathbf{x}^0 - \mathbf{E}_x^{ext}), \\ \mathbf{y}^t &= \mathbf{y}^0 + \mathbf{A}_P^{-1}(\mathbf{y}^{t-1} - \mathbf{y}^0 - \mathbf{E}_y^{ext}). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Eine Regularisierung aufgrund der schlechten Kondition der Matrix \mathbf{A}_P kann durch Ersetzen von \mathbf{A}_P mit $\mathbf{G} := \mathbf{A}_P + \lambda \mathbf{I}$ vorgenommen werden, wird aber im Programm durch die *Skalierung* der Zeilensumme¹ der Matrix auf den Wert Eins realisiert (vgl. Abschnitt 4.4.2).

Tafus-Verdrängungsmodell

Das Grundmodell der Tafus bleibt für die Verdrängung bestehen, siehe Kapitel 4.3 zur Glättung.

Die zu minimierende Zielfunktion mit der Tangentenwinkelfunktion ϕ lautet:

$$I[\phi(s)] := \int_0^1 \left(E_{ext} + \frac{1}{2} \alpha \phi^2 + \frac{1}{2} \beta \phi'^2 \right) ds, \quad (6.12)$$

¹Die Zeilensumme ist die Summation der Werte aller Elemente einer Zeile.

6.1.2 VERDRÄNGUNGSMODELL DER TAFUS

Diese ist anfangs aus der Parameterform der Linie zu berechnen. Die Formeln hierfür sind im Kapitel 4.3 gegeben.

Bei Anwendung des *Variationsverfahrens* zur Energieminimierung erfolgt zunächst die Ableitung der äquivalenten Eulergleichung 2. Ordnung:

$$\frac{\partial E_{ext}}{\partial \varphi} + \alpha \varphi(s) - \beta \dot{\varphi}(s) = 0. \quad (6.13)$$

Anschließend wird die Gleichung (6.13) mit *Finiten Differenzen* diskretisiert und das lineare Gleichungssystem aufgestellt:

$$\mathbf{A}_T \varphi + \mathbf{E}_\varphi^{ext}(\varphi, s) = \mathbf{0} \quad (6.14)$$

Dieses kann nach der iterativen Lösungsvorschrift von [Borkowski und Meier, 1999] äquivalent formuliert werden durch:

$$\varphi^t = \varphi^{t-1} + \mathbf{A}_T^{-1} \mathbf{b}_\varphi^{t-1}, \quad (6.15)$$

mit $\mathbf{b}_\varphi = \mathbf{E}_\varphi^{ext} = \frac{\partial E_{ext}}{\partial \varphi}$. Die Matrix \mathbf{A}_T des Gleichungssystems 6.15 hat die tridiagonale Struktur:

$$\mathbf{A}_T = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & \dots \\ b & a & b & 0 & 0 & \\ 0 & b & a & b & 0 & \\ 0 & 0 & b & a & b & \\ 0 & 0 & 0 & b & a & \\ \vdots & & & & & \end{bmatrix}, \quad (6.16)$$

mit den Koeffizienten:

$$a := \alpha + 2\beta \quad \text{und} \quad b := -\beta. \quad (6.17)$$

Eine Regularisierung des System bzw. der Matrix \mathbf{A}_T ist nicht zwingend erforderlich, weil die Matrix eine annehmbare Kondition besitzt. Um allerdings eine maßstabstreue Filterung zu realisieren (vgl. Kapitel 4.5.3), wird empfohlen den Steuerparameter $\alpha = 1$ zu setzen. Dadurch ergibt sich die Summe der Elemente einer Zeile zu Eins, welches bei den Snakes durch die Matrix-Skalierung erreicht wird.

Die angegebene Filteervorschrift (6.15) kann so interpretiert werden, daß die Funktion der Verdrängungsenergie mit der invertierten Tafus-Matrix geglättet wird.

Nachdem die neue Tangentenwinkelfunktion φ^t berechnet wurde, sind mit den Formeln (4.41ff.) aus dem Kapitel zur Formvereinfachung, die neuen Koordinaten der Linienpunkte zu berechnen. Die angegebenen Gleichungen zur Rückrechnung realisieren eine Verschiebung des Punktes senkrecht zur Tangentenrichtung mittels Vorwärtseinschneiden.

6.1.3 Ansatz der äußeren Energie

Allgemeiner Ansatz

Nach Definition und Aufstellung der Gleichungssysteme für die Verdrängung mit Snakes und Tafus, muß die externe Verdrängungsenergie beider Modelle formuliert werden. Sie dient der Beschreibung der Konfliktsituation zwischen den Linien.

In der Abbildung 6.3 ist eine Verdrängungssituation zwischen zwei Linien dargestellt. Der hier abgebildete Konflikt resultiert aus der zu geringen Distanz d des Punktes P_i zur Linie L_2 , welche den Mindestabstand h unterschreitet. Der Hardcore-Abstand h setzt sich aus der halben Signaturbreite für das Kartenelement und dem Abstand h_{vis} für die optische Trennung der Objekte zusammen.

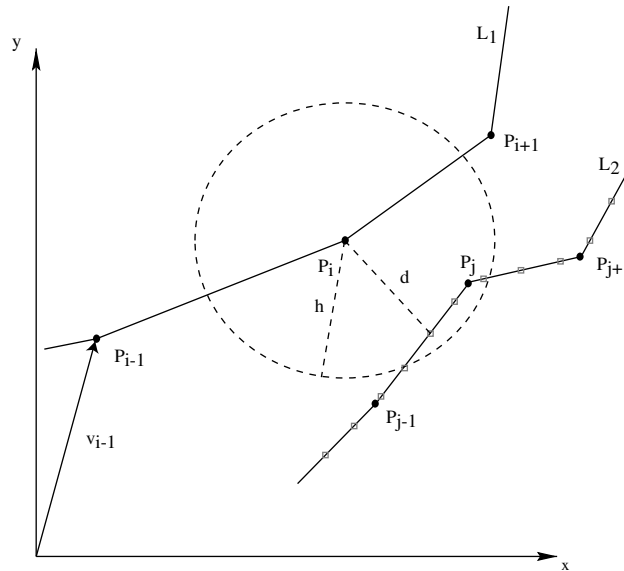


Abbildung 6.3: Berechnung der externen Energie bei der Verdrängung.

Um aus der Verdrängungssituation ein metrisches Maß für die externe Energie abzuleiten, wird diese äquivalent der normierten Differenz zwischen geometrischen Soll-Abstand h und Ist-Abstand d_i gesetzt. Soll die Energie mit größer werdender Differenz linear zunehmen, dann berechnet sie sich für die Stützstelle P_i der Linie $L_{k=l=1}$ auf folgende Weise:

$$E_{ext} \sim \frac{1}{m} \sum_{L_k, k \neq l} \sum_j \begin{cases} 1 - (d_j/h) & : d_j < h \\ 0 & : d_j \geq h \end{cases}, \quad (6.18)$$

mit:

$$d_j = \sqrt{(x_{k \neq l, j} - x_{k=l, i})^2 + (y_{k \neq l, j} - y_{k=l, i})^2}, \quad (6.19)$$

beziehungsweise aus dem Durchschnitt der normierten Abstandsdifferenzen, welche größer Null sind, zu allen Punkten anderer Linien. Die Variable k bezeichnet alle existierenden Linien innerhalb einer erweiterten Hardcore-Distanz (z. B. $3h$), die Variable j umfaßt alle Punkte einer Linie L_k und m ist die Anzahl der Punkte der Linien $L_{k \neq l}$, die innerhalb des Hardcore-Kreises liegen. Die nach der Formel

(6.18) berechnete Verdrängungsenergie für einen Punkt umfaßt den Wertebereich von 0 (keine Verschiebung nötig) bis 1 (zwei Punkte verschiedener Linien liegen aufeinander).

Werden die Originalpunkte der Linie L_2 für die Berechnung der Energie verwendet, kann der Fall eintreten, daß kein Punkt von L_2 in den Kreis des Mindestabstandes fällt, obwohl die Linien zu dicht aneinander liegen. Für dieser Situation wird folglich keine Verdrängungsenergie berechnet. Dies ist unbedingt zu vermeiden, weshalb die Berechnung der externen Energie anhand von neuen äquidistanten Stützpunkten vorgenommen wird.

In der Abbildung 6.3 werden die interpolierten Punkte durch graue Quadrate dargestellt. Für den Punkt P_i liegen jetzt zusätzlich interpolierte Punkte innerhalb der Hardcore - Distanz, statt des Originalstützpunktes. Die Berechnungsgenauigkeit für die Verschiebung von P_i wird durch die Interpolation von Stützpunkten erhöht, da sich für die Snakes ein mittlerer Verschiebungsbetrag und eine mittlere Richtung berechnen läßt. Nachteilig ist allerdings der erhöhte Rechenaufwand mit kleiner werdenden Stützpunktabständen bzw. größerer Punktdichte. In der Umsetzung des Verdrängungsalgorithmus wurde eine Punktverdichtung der Linien mit dreifacher Punkteanzahl durchgeführt.

Berechnung des Verdrängungsenergie bei den Snakes

Wird die Verdrängung mit Snakes vorgenommen, so werden Verschiebungen in den Koordinatenrichtungen x und y ermittelt. Der Ansatz für die externe Energie aus Gleichung (6.18) ist dafür zu modifizieren. Da bei den Snakes die Koordinatenrichtungen in getrennten Gleichungssystemen behandelt werden, sind auch zwei verschiedene externe Energien zu berechnen. Wichtig ist hierbei nicht nur die Berechnung des Verschiebungsbetrages, sondern auch die Ermittlung der Richtung, welche im genannten Ansatz noch nicht enthalten ist.

Die Verdrängungsenergien werden bei den Snakes mit folgenden Gleichungen berechnet:

$$E_x^i = \frac{\partial E_{ext}^i}{\partial x} = \frac{1}{m} \sum_{L_k, k \neq l} \sum_j \begin{cases} (1 - |dx_j/h|) \cdot \text{sign}(dx_j); & : d_j < h \\ 0 & : d_j \geq h \end{cases}, \quad (6.20)$$

und:

$$E_y^i = \frac{\partial E_{ext}^i}{\partial y} = \frac{1}{m} \sum_{L_k, k \neq l} \sum_j \begin{cases} (1 - |dy_j/h|) \cdot \text{sign}(dy_j); & : d_j < h \\ 0 & : d_j \geq h \end{cases}. \quad (6.21)$$

Die Variablen dx und dy sind die Differenzen in den Koordinatenrichtungen zwischen aktuellem (interpolierten) Punkt und zu verdrängendem Punkt P_i . Die MATLAB-Funktion $\text{sign}()$ liefert das Vorzeichen der Verschiebung.

Wird nach der Berechnung die Energie in das Gleichungssystem (6.11) eingesetzt, so ist diese mit der Hardcore-Distanz zu multiplizieren, um die Beträge der Verschiebung zu erhalten:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^t &= \mathbf{x}^0 + \mathbf{A}_p^{-1}(\mathbf{x}^{t-1} - \mathbf{x}^0 - \mathbf{E}_x \cdot h), \\ \mathbf{y}^t &= \mathbf{y}^0 + \mathbf{A}_p^{-1}(\mathbf{y}^{t-1} - \mathbf{y}^0 - \mathbf{E}_y \cdot h). \end{aligned} \quad (6.22)$$

In der Abbildung 6.4 ist zur Veranschaulichung ein Beispiel für die Verdrängung mit Snakes dargestellt.

6.1.3 ANSATZ DER ÄUSSEREN ENERGIE

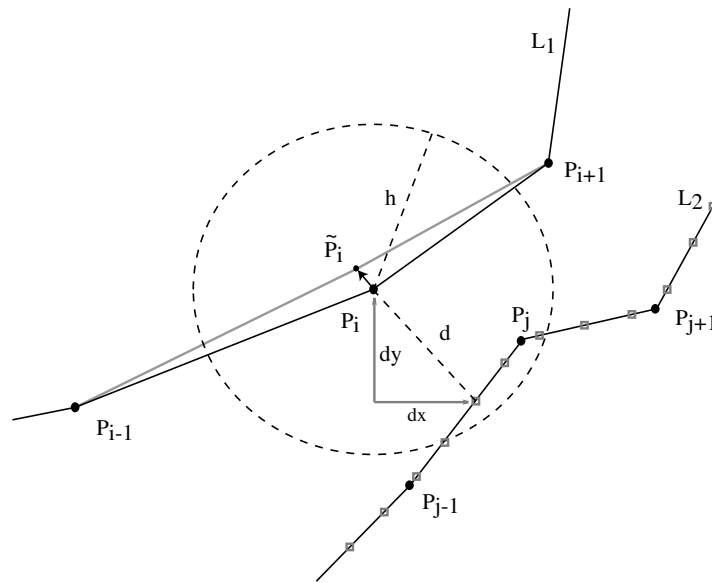


Abbildung 6.4: Berechnung der externen Energie bei der Verdrängung mit Snakes.

Berechnung der Verdrängungsenergie bei den Tafus

Wird mit Tafus verdrängt, kann der Energieansatz (6.18) beibehalten werden. Eine vorhandene Verdrängungsenergie bewirkt eine seitliche Verschiebung des Punktes senkrecht zur Tangentenrichtung, wie im Bild 6.5 zu sehen ist. Um die Translation in den Koordinatenrichtungen durchzuführen, muß die Verdrängungsenergie in eine Winkeländerung $d\varphi$ umgesetzt werden. Mit der ermittelten Winkeländerung kann durch Vorwärtseinschneiden vom vorhergehenden Punkt P_{i-1} und vom alten - zu verschiebenden - Punkt P_i aus, die neue Lage \tilde{P}_2 berechnet werden.

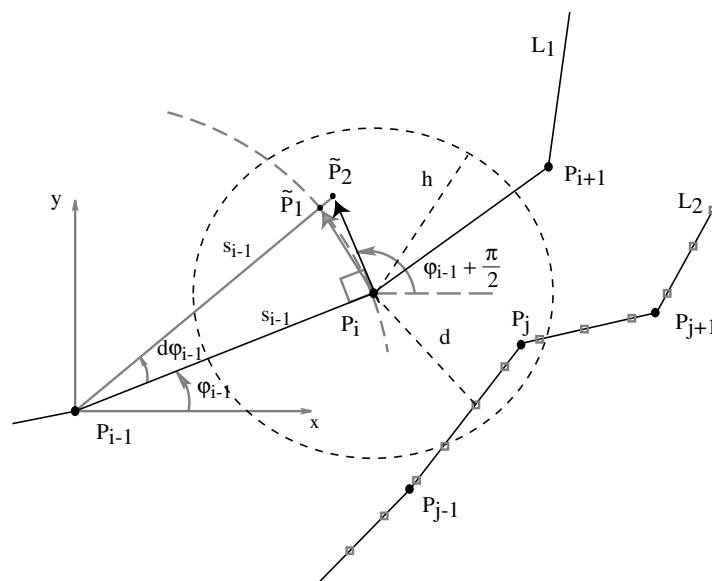


Abbildung 6.5: Berechnung der externen Energie bei der Verdrängung mit Tafus.

Der Punkt P_i wird durch den zu geringen Abstand zur Linie L_2 um $d\varphi$ verschoben. Die Lage \tilde{P}_1 wurde mit der Bogenformel ermittelt und die Lage \tilde{P}_2 durch Vorwärtseinschneiden.

6.1.4 RESTRIKTIONEN BEI DER VERDRÄNGUNG

In der vorliegenden Programmierung der Tafus-Verdrängung wird zunächst die Konfliktenergie der Ausgangssituation mit der Formel (6.18) ermittelt. Anschließend werden alle Punkte um einen kleinen² Winkel $\Delta\varphi$ verschoben und die Konfliktenergie für jeden Punkt neu kalkuliert. Hierfür werden die verschobenen Punkte (xn_i, yn_i) hinreichend genau mit der Bogenformel berechnet:

$$\begin{aligned} xn_i &= x_i + s_{i-1} \Delta\varphi \cos(\varphi_{i-1} + \pi/2), \\ yn_i &= y_i + s_{i-1} \Delta\varphi \sin(\varphi_{i-1} + \pi/2). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Die Änderung der Energie zwischen Ausgangs- und Verschiebungslage gibt den Winkelbetrag $|d\varphi|$ und die Richtung der durchzuführenden Verschiebung an, um die Verdrängungssituation aufzulösen (vgl. Formel (6.24)). Da der Punkt nur senkrecht zur Tangentenrichtung der Ausgangslinie verschoben werden kann, ist mit "Richtung" das Vorzeichen von $d\varphi$ gemeint, das den Neupunkt \tilde{P}_i links oder rechts der Polygonseite plaziert.

Die Berechnung der Verschiebung E_φ als Winkelgröße erfolgt mittels:

$$E_\varphi = \frac{\partial E_{ext}}{\partial \varphi} = \frac{E_{ext}(\varphi, s) - E_{ext}(\varphi + \Delta\varphi, s)}{\Delta\varphi}, \quad (6.24)$$

wobei E_{ext} mit der Gleichung (6.18) erhalten wird.

Damit eine beliebige Formänderung der Linie verhindert wird bzw. die Gestalt der Linie erhalten bleibt, ist zusätzlich eine restaurierende Energie E_{res} zu definieren:

$$E_{res}^t = \varphi^{t-1} - \varphi^0. \quad (6.25)$$

Sie berechnet sich aus der Differenz der Tangentenwinkelfunktion (TWF) φ^0 der ursprünglichen Linie und der TWF aus dem vorhergehenden Verdrängungsschritt φ^{t-1} .

Werden die beiden Größen in die Formel (6.15) eingesetzt, so erhält man:

$$\varphi^t = \varphi^{t-1} + \mathbf{A}_T^{-1}(\mathbf{E}_\varphi - \mathbf{E}_{res}). \quad (6.26)$$

Um die neue Punktlage mittels Vorwärtseinschneiden zu berechnen, wird das Gleichungssystem nach der Winkeländerung umgestellt:

$$d\varphi^t = \mathbf{A}_T^{-1}(\mathbf{E}_\varphi - \mathbf{E}_{res}). \quad (6.27)$$

6.1.4 Restriktionen

Bei der Implementation der Verdrängungsalgorithmen in das Glättungsprogramm sind folgende Einschränkungen sinnvoll:

- (A) Anfangs- und Endpunkte der Linien, die an der Verdrängung beteiligt sind, sind beizubehalten. Für die vorhandenen Testdaten ist dies insofern wichtig, da Linien immer an Kreuzungen enden und Kreuzungspunkte auch nach der Verdrängung erhalten bleiben sollen. Wird dies nicht beachtet,

²Im Programm wurde der Winkel $\Delta\varphi = \frac{0.1}{60} \cdot \frac{\pi}{180}$ gesetzt.

6.1.4 RESTRIKTIONEN BEI DER VERDRÄNGUNG

werden die topologischen Beziehungen zerstört.

Bei den Snakes und den Tafus erfolgt die Korrektur zum Erhalt des ursprünglichen Start- und Endpunktes durch Gewichtung der berechneten Koordinaten- bzw. Winkeländerungen mit einem Vektor \mathbf{g} . Um bei Kreuzungen die Einlaufrichtung der verdrängten Linie zu erhalten, werden die Verschiebungen der nächsten Randpunkte ebenfalls gewichtet.

Der Vektor \mathbf{g} hat für die Tafus z. B. die Form:

$$\mathbf{g}^T := \left[\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} \quad 0 \right].$$

Der Wert g_1^T wird nicht Null gesetzt, weil sich die Lage des Ausgangspunktes, als ein Endpunkt der Linie, bei der Rücktransformation in rechtwinklige Koordinaten nicht verändert. Der Vektor \mathbf{g}^S , für die Verdrängung mit Snakes, hat hingegen die Struktur:

$$\mathbf{g}^S := \left[0 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3} \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} \quad 0 \right].$$

Werden die Gewichtsvektoren in die Gleichungssysteme eingesetzt, so erhält man für die Snakes:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^t &= \mathbf{x}^0 + \mathbf{g}^S \mathbf{A}_P^{-1} (\mathbf{x}^{t-1} - \mathbf{x}^0 - \mathbf{E}_x \cdot h), \\ \mathbf{y}^t &= \mathbf{y}^0 + \mathbf{g}^S \mathbf{A}_P^{-1} (\mathbf{y}^{t-1} - \mathbf{y}^0 - E_y \cdot h), \end{aligned} \quad (6.28)$$

und für die Tafus:

$$\mathbf{d}\varphi^t = \mathbf{g}^T \mathbf{A}_T^{-1} (\mathbf{E}_\varphi - \mathbf{E}_{\text{res}}). \quad (6.29)$$

Eine alternative Problemlösung erfolgt von [Bader, 2001]. Nach dieser ruft ein Punkt einer anderen Linie keine Verdrängungsenergie hervor, wenn der Abstand zum zu verdrängenden Punkt innerhalb des Liniennetzwerkes kleiner als das zweifache der Hardcore-Distanz h ist. Diese Lösung fand keine Verwendung, da vor dem Verdrängen die topologischen Beziehungen zwischen den Linien auszuwerten sind. Dies ist bei der Implementation in ein bestehendes Geo-Informationssystem kein Problem, würde aber im verwendeten Testsystem MATLAB einen erheblichen Mehraufwand bei der Programmierung hervorrufen.

- (B) Die zweite Einschränkung bei der Lösung von Verdrängungssituationen wird nur für das Tafus-Verfahren gemacht. Um eine Zerstörung der Linie durch extreme Winkeländerungen zu vermeiden, wird die berechnete Winkeländerung $d\varphi$ in ihrer Größe beschränkt. In den Untersuchungen hat sich die Schranke von:

$$|d\varphi| \leq 10 \frac{180}{\pi}$$

als sinnvoll erwiesen. Die Lösung des Verdrängungsproblems kann trotzdem vollständig erfolgen, wenn der Algorithmus iterativ abläuft.

Neben den beiden genannten Restriktionen ist wie bei der Glättung eine maßstabstreue Filterung günstig. Dies bedeutet, daß für die Tafus der Steuerparameter $\alpha = 1$ gesetzt und für die Snakes die Skalierung der Filtermatrix und die Maßstabskorrektur der Randkoeffizienten (vgl. 4.4.2) durchgeführt wird. Die Verwendung variabler Koeffizientenmatrizen \mathbf{A}_T und \mathbf{A}_P ist nach bisherigen Überlegungen für die Verdrängung nicht sinnvoll.

6.2 Verdrängung und Glättung für Snakes und Tafus

Nach der Einführung der energieminimierenden Verdrängungsmodelle stehen die notwendigen theoretischen Grundlagen für eine Kombination der Algorithmen für die Linienglättung und Linienverdrängung bereit. Für die Kombination beider Generalisierungsmethoden gibt es zwei grundlegende Ansätze. Zum einen können beide Verfahren in einem integrierten Ansatz kombiniert werden. Zum anderen ist die wechselseitige Durchführung beider Verfahren vorstellbar. Um eine Interaktion herzustellen (vgl. Abschnitt 6.3.2), sind hier jedoch Modifikationen der jeweiligen Grundmodelle notwendig. Bevor jedoch auf beide Varianten näher eingegangen wird, soll ein Überblick über die Beschränkungen bei der Implementierung im Programm gegeben werden.

6.2.1 Restriktionen der Kombinationsmodelle

In den Tabellen 6.1 und 6.2 werden die bisher verwendeten Restriktionen für die Snakes- und Tafus-Modelle zusammengefaßt. Der Zweck dieser Beschränkungen besteht in der Entwicklung von lauffähigen und robusten Filteralgorithmen und in der Durchsetzung von Anforderungen, die aus Sicht der kartographischen Generalisierung von Linien bestehen.

Tabelle 6.1: Restriktionen für das Snakes-Modell

Bedingung / Eigenschaft	Glättung	Verdrängung	Kombination nach 6.2.3
1 Maßstabstreue Filterung durch Skalierung der Matrix A_P (vgl. 4.4.2)	x	x	x
2 Maßstabskorrektur der Randkoeffizienten der Matrix A_P (vgl. 4.4.2)	x	x	x
3 Erhalt der Anfangs- und Endpunkte			
- durch Spiegelung der Randwerte (vgl. 4.4.2)	x	-	x
- durch Gewichtung von dx, dy (vgl. 6.1.4)	x	x	x
4 variable Koeffizientenmatrix A_P (vgl. 5.2.2)	x	-	x
5 Segmentierung der Linie (vgl. 5.4)	x	x	x
6 empfohlene Parameterwerte (*):	$1 \leq \beta \leq 1000$ $\alpha = \begin{cases} 0.001 \dots 1 & \text{für: } \beta = 1 \\ 1 & \text{für: } \beta \geq 1 \end{cases}$		

(*) Parameterwerte aus den Untersuchungen zur Glättung

Beim wechselseitigen Algorithmus und beim integrierten Verfahren werden alle Restriktionen so verwendet, wie in der Tabellen angegeben. Einzig das Löschen von Punkten, welches speziell bei der Glättung mit Tafus sinnvoll ist (vgl. Abschnitt 5.3), wurde nicht implementiert, da sich der Programmieraufwand für die Berechnung der formerhaltenden Energie entsprechend erhöht.

6.2.2 WECHSELSEITIGER LÖSUNGsalGORITHMUS

Tabelle 6.2: Restriktionen für das Tafus-Modell

Bedingung / Eigenschaft	Glättung	Verdrängung	Kombination nach 6.2.3
1 Restriktionen für die Krümmung ϕ (vgl.4.5.3)	x	-	x
2 Maximalwerte für die Verschiebung $d\phi$ (vgl.6.1.4)	-	x	siehe 6.2.3
3 Erhalt der Anfangs- und Endpunkte durch Gewichtung von $d\phi$ (vgl. 6.1.4)	x	x	x
4 variable Koeffizientenmatrix A_T (vgl. 5.2.1)	x	-	x
5 Segmentierung der Linie (vgl. 5.4)	x	x	x
6 empfohlene Parameterwerte (*):		$0.5 \leq \beta \leq 1000$ $\alpha = 1$	

(*) Parameterwerte aus den Untersuchungen zur Glättung

Tabelle 6.3: Gleichungssysteme für den wechselseitigen Lösungsalgorithmus

Spline-Modell	Glättung	Verdrängung
Snakes	$\mathbf{x}^t = \mathbf{A}_{P,skal}^{-1} \mathbf{x}^{t-1}$ $\mathbf{y}^t = \mathbf{A}_{P,skal}^{-1} \mathbf{y}^{t-1}$	$\mathbf{x}^t = \mathbf{x}^0 + \mathbf{A}_{P,skal}^{-1} (\mathbf{x}^{t-1} - \mathbf{x}^0 - \mathbf{E}_x \cdot h)$ $\mathbf{y}^t = \mathbf{y}^0 + \mathbf{A}_{P,skal}^{-1} (\mathbf{y}^{t-1} - \mathbf{y}^0 - \mathbf{E}_y \cdot h)$
Tafus	$d\phi^t = \mathbf{A}_{T,\alpha=1}^{-1} \phi^{t-1}$	$d\phi^t = \mathbf{A}_{T,\alpha=1}^{-1} [\mathbf{E}_\phi - (\phi^{t-1} - \phi^0)]$

**skal* : Die Zeilen der Matrix A_P wurden so skaliert, daß die Summe der Zeilenelemente den Wert Eins hat.

6.2.2 Wechselseitiger Lösungsalgorithmus

Bei der wechselseitigen Anwendung der Gleichungssysteme (vgl. Tabelle 6.3) scheint es nach der Verkleinerung des Kartenmaßstabes und der Einführung der neuen Signaturgrößen günstig, zuerst die Verdrängungskonflikte zu bearbeiten. Sind die Überlagerungs- und Abstandsprobleme bestmöglich³ iterativ gelöst worden, sollte der Glättungsalgorithmus eingesetzt werden.

Bei der Umsetzung im Programm wird die Glättung iterativ durchgeführt. Die Krümmungsvarianz wurde als der Parameter festgelegt, welcher bestimmt ob und wie oft eine Linie geglättet wird. Liegt diese für eine bestimmte Linie unter der zu definierenden Varianzschranke, so ist die Linie nicht zu glätten, sondern nur zu verdrängen. Überschreitet die Krümmungsvarianz hingegen den vorgegebenen Wert, dann wird eine (iterative) Glättung durchgeführt, bis die Abbruchschranke erreicht ist.

³Die Verdrängungssituationen lassen sich nicht immer vollständig auflösen, z. B. bei Platzproblemen durch viele dicht beieinanderliegende Kartenobjekte. Eine solche Situation entsteht in der Regel bei Verkehrswegen die Hochgebirgspässe überqueren.

6.2.3 INTEGRIERTER LÖSUNGsalGORITHMUS

Empfehlenswert ist eine Verdrängung nach *jedem* Glättungsschritt, um die Konfliktsituationen zu bereinigen. Geschieht dies nicht, können sich die Verdrängungssituationen mit fortschreitender Glättung verschärfen und nach Abschluß der Glättung gar nicht mehr bzw. fehlerhaft aufgelöst werden. Die Initialisierung der Lage (x^0, y^0) bzw. der TWF φ^0 , wie sie für die Berechnung der formerhaltenden Energie bei der Verdrängung benötigt wird, erfolgt mit den Größen des vorangegangenen Glättungsschrittes. Somit werden (x^0, y^0) und φ^0 nach jeder Glättung neu initialisiert.

Eine Vermischung der Algorithmen für die Tafus und Snakes, z. B. geringe Glättung mit Tafus und Verdrängung mit dem Snakes-Algorithmus, ist vorläufig nicht vorgesehen, aber bei weiterführenden Untersuchungen denkbar.

6.2.3 Integrierter Lösungsalgorithmus

Neben der wechselseitigen Ausführung der Glättungs- und Verdrängungsalgorithmen sollen nach einem Vorschlag von [Burghardt, 2002c] beide Verfahren in *einem* Gleichungssystem integriert werden. Dies geschieht für Tafus und Snakes gesondert, da sich aufgrund der Unterschiedlichkeit der zu glättenden Zielfunktionen eine Mischung beider Modelle ausschließt.

Die Zusammenführung der Algorithmen soll zunächst für die **Snakes** vorgenommen werden und ist mit den aufgestellten Gleichungssystemen anschaulich zu vollziehen. Die beiden Snakes-Modelle haben die folgende Darstellung:

$$\text{Glättung:} \quad \mathbf{A}_P \mathbf{x}_G^t = \mathbf{x}_G^{t-1}, \quad (6.30)$$

$$\text{Verdrängung:} \quad \mathbf{A}_P (\mathbf{x}_V^t - \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}_V^{t-1} - \mathbf{x}^0 - \mathbf{E}_x h. \quad (6.31)$$

Nach Multiplikation mit einem Faktor γ :

$$\gamma \in \mathbb{R} \{0 \dots 1\},$$

welcher das Verhältnis zwischen Glättung ($\gamma = 0$) und Verdrängung ($\gamma = 1$) bestimmt, werden die Gleichungssysteme addiert und man erhält:

$$\mathbf{A}_P [(1 - \gamma) \mathbf{x}_G^t + \gamma (\mathbf{x}_V^t - \mathbf{x}^0)] = (1 - \gamma) \mathbf{x}_G^{t-1} + \gamma (\mathbf{x}_V^{t-1} - \mathbf{x}^0 - \mathbf{E}_x h).$$

Setzt man schließlich $\mathbf{x}_G = \mathbf{x}_V$, dann folgt:

$$\mathbf{A}_P (\mathbf{x}^t - \gamma \mathbf{x}^0) = \mathbf{x}_G^{t-1} - \gamma \mathbf{x}^0 - \gamma \mathbf{E}_x h,$$

und umgestellt nach der gesuchten Größe:

$$\mathbf{x}^t = \gamma \mathbf{x}^0 + \mathbf{A}_P^{-1} (\mathbf{x}_G^{t-1} - \gamma \mathbf{x}^0 - \gamma \mathbf{E}_x h). \quad (6.32)$$

Analog folgt für die andere Koordinatenrichtung:

$$\mathbf{y}^t = \gamma \mathbf{y}^0 + \mathbf{A}_P^{-1} (\mathbf{y}_G^{t-1} - \gamma \mathbf{y}^0 - \gamma \mathbf{E}_y h). \quad (6.33)$$

6.3 IMPLEMENTATION UND VERGLEICH DER VERFAHREN

Die Kombination der **Tafus**-Gleichungssysteme wird auf ähnliche Art und Weise vorgenommen. Aus praktischen Gründen sind die nach der Winkeldifferenz umgestellten Gleichungen Ausgangspunkt der Kombination:

$$\text{Glättung:} \quad \mathbf{d}\varphi'_G = \mathbf{A}_T^{-1} \dot{\varphi}'^{t-1}, \quad (6.34)$$

$$\text{Verdrängung:} \quad \mathbf{d}\varphi'_V = \mathbf{A}_T^{-1} [\mathbf{E}_\varphi - (\varphi'^{t-1} - \varphi^0)]. \quad (6.35)$$

Die einfachste Kombination beider Systeme ist die Addition der Differenzgrößen $\mathbf{d}\varphi'_G$ und $\mathbf{d}\varphi'_V$. Die Multiplikation mit dem gewichtenden Faktor γ wird ebenfalls angebracht:

$$\mathbf{d}\varphi'^t = \mathbf{A}_T^{-1} [\gamma (\mathbf{E}_\varphi - (\varphi'^{t-1} - \varphi^0)) + (1 - \gamma) \dot{\varphi}'^{t-1}]. \quad (6.36)$$

Bei der Umsetzung im Programm ist es günstig den Klammerausdruck von Gleichung (6.36) in seinem Betrag zu beschränken, damit die Linie bei der Rückrechnung in rechtwinklige Koordinaten nicht zerstört wird. In der Testumgebung erfolgten die schon genannten Einzelbeschränkungen:

$$|d\varphi'_G| \leq 10 \frac{180}{\pi} \quad \text{und} \quad |d\varphi'_V| \leq 10 \frac{180}{\pi},$$

wodurch eine Punktverschiebung um einen Maximalwinkel von 20 Grad erzielt werden kann.

Ein Problem der kombinierten Gleichungssysteme stellt die Initialisierung der Größen (x^0, y^0) und φ^0 dar. Wird die ursprüngliche Linie zur Festlegung der Größen verwendet, so ist absehbar, daß die Linienglättung nur bis zu einem gewissen Grad erfolgen kann. Durch die Glättung erreicht der jeweils formerhaltende Term schnell Beträge, welche einer fortlaufenden Linienvereinfachung stark entgegenwirken. Im Rahmen der Arbeit ist eine weiterführende Untersuchung der Problematik nicht vorgesehen. Demzufolge werden aus Mangel an Erkenntnissen über eine optimale Initialisierung die Größen (x^0, y^0) und φ^0 nach jedem Iterationsschritt neu zugewiesen.

6.3 Implementation und Vergleich der Verfahren

Im Kapitel 6.2 wurden verschiedene Algorithmen zur Durchführung einer gemeinsamen Glättung und Verdrängung aufgestellt. Diese sind auf ihre Praxistauglichkeit zu untersuchen, auszuwerten und gegebenenfalls zu verbessern.

6.3.1 Testdaten

Die im zweiten Kapitel vorgestellten Datensätze sind für die folgenden Untersuchungen ungeeignet, da sie keine Verdrängungssituationen enthalten. Aus diesem Grunde wurden neue Beispiele digitalisiert, welche in der Abbildung 6.6 zu sehen sind.

Bei der Digitalisierung der Komplexbeispiele ist auf die Begrenzung jeder Linie durch zwei Knoten geachtet worden. Innerhalb einer Linie dürfen keine Kreuzungen liegen. Dies ist notwendig, weil nur

6.3.2 REALISIERUNG UND MODIFIKATIONEN DER ALGORITHMEN

Anfangs- und Endpunkt einer Linien in den vorhandenen Testalgorithmen fixiert werden. Die Punkte dazwischen sind "frei" beweglich. Ein Nachteil der Algorithmusstruktur besteht somit darin, daß Kreuzungen in Verdrängungssituationen nicht verschoben werden können.

Um dies zu ermöglichen, müßte eine erweiterte Verdrängungs-Netzstruktur unter Einbeziehung der Topologie aufgebaut werden. Bei der aktuellen Realisierung wird jedoch eine Linie *für sich* in der geometrischen Relation zur Summe aller anderen Objekte betrachtet und nur diese Linie im Sinne der Glättung bzw. Verdrängung bearbeitet. Alle anderen Objekte sind zu dem Zeitpunkt fixiert.

Ein weiterer wesentlicher Unterschied zu den vorangegangenen Testdaten liegt darin, daß die Punktabstände der Linien nicht äquidistant sind. Für die Snakes-Algorithmen, die auf der Filterung der rechtwinkligen Koordinaten basieren, mag dies keine besonderen Auswirkungen haben. Hingegen sind bei den Tafus nach [Borkowski und Meier, 2001] schlechtere Ergebnisse zu erwarten.

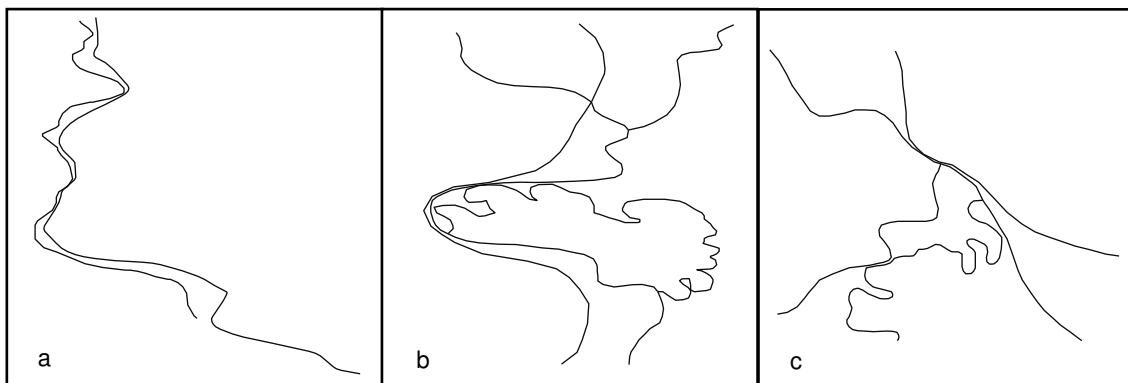


Abbildung 6.6: Beispieldaten für die Kombination von Verdrängung und Glättung.

Rechts ist das einfache Beispiel (a) mit zwei Linien abgebildet und links die komplexere Datensätze (b) und (c) mit Kreuzungssituationen.

6.3.2 Realisierung und Modifikationen der Algorithmen

Abbruchkriterium der iterativen Verfahren

In einem kombinierten Algorithmus bestehen zwei Ziele: Die Glättung verlangt die Minimierung der inneren (Gestalt-) Energie der Linie. Die Verdrängung hingegen erfordert entweder den Ausgleich zwischen verdrängenden und formerhaltenden Kräften oder das Verschwinden der Verdrängungsenergie.

Sowohl die Glättung als auch die Verdrängung verlaufen iterativ. Als Abbruchkriterium für die Formvereinfachung kann die Anzahl der Iterationen oder eine Zielgröße eingeführt werden, die den Glättungsgrad der Linie beschreibt. Bei der Umsetzung der Glättungsverfahren wurde die Varianz der Krümmung als Zielgröße festgelegt. Unterschreitet die Krümmungsvarianz eines Liniensegmentes den Grenzwert, wird das Segment nicht weiter geglättet. Die Umsetzung erfolgt im integrierten Algorithmus durch setzen des Parameters $\gamma = 1$. Zur Vorbeugung von Problemen, die häufig bei der Ermittlung der Krümmungsvarianz von Linien mit wenigen Punkten entstehen, werden nur Krümmungen $\phi \leq \pi/4$ bei der Berechnung

6.3.2 ÜBERLAGERUNG VON LINIEN DURCH GLÄTTUNG

zugelassen.

Nach jedem Glättungsschritt können neue Konflikte entstehen, welche eine Ermittlung der Verdrängungssituationen grundsätzlich nach jeder Iteration erfordern. Nur zu verdrängen ist zwischen zwei Schritten der Formvereinfachung, um eine möglichst konfliktfreie Situation herzustellen, oder wenn alle Linien die vorgegebene Krümmungsvarianz erreicht haben.

Optimales Ziel der Verdrängung ist die Eliminierung der externen Konflikte durch Auflösung der Verdrängungssituation. Für das Beispiel (a) der Abbildung 6.6 ist dies möglich, weil in jede Richtung ausreichend Verdrängungsraum zur Verfügung steht. Kritisch ist die Situation bei der Konzentration von vielen Objekten auf wenig Raum. Die Linien können aus Platzgründen nur geringfügig verschoben werden und die Konfliktsituationen bleiben bestehen. In diesem Fall sollten sich innere und äußere Energie ausgleichen und die Gesamtenergie der Snake- bzw. Tafus-Funktion minimiert werden. Die iterative Verdrängung ist abzubrechen, wenn sich nach anfänglicher Minimierung der Summe von externer (verdrängender) und interner (formerhaltender) Energie der Betrag der Gesamtenergie

$$E_t = \sum |E_t^{int} - E_t^{ext}| \quad (6.37)$$

eines Iterationsschrittes t nur noch unwesentlich verändert.

Die Untersuchungen zur Verdrängung ergaben eine Verringerung der Gesamtenergie einer einzelnen Linie, aber auch einen zum Teil sehr schwankenden Verlauf der Energie-Funktion (vgl. Abbildung 6.7). Eine Ursache liegt in der Abstoßung der Linie L_1 von L_2 , solange, bis sie von neuen Konfliktsituationen mit anderen Linien gehemmt wird. Tritt dies an mehreren Stellen in verschiedenen Richtungen auf, ergibt sich ein sehr variabler Verlauf der Energiesumme. Die Snake- bzw. Tafus-Energie als Abbruchkriterium bei der iterativen Verdrängung zu benutzen, ist demnach nur bedingt empfehlenswert. Dies gilt vor allem dann, wenn sich die Verdrängungssituation durch nachfolgende Glättungsschritte erheblich verändert. Eine Lösung für das Problem kann noch nicht präsentiert werden. Aus diesem Grunde wird im Programm die Anzahl der Verdrängungsschritte nach der Glättung sowie zwischen zwei Glättungsschritten vordefiniert. Um langen Rechenzeiten vorzubeugen, sollten eins bis sechs Iterationen durchgeführt werden.

Überlagerung von Linien durch Glättung

Die Algorithmen der bisher vorgestellten kombinierten Modelle sind für einfache Beispiele wirksam (z.B. Abbildung 6.6 (c)). In der Umgebung von Konfliktsituationen steht hier ausreichend Platz für die Generalisierungsverfahren zur Verfügung. Das Beispiel der Abbildung 6.6 (b) bzw. 6.7 weist hingegen zwei Problemstellen auf. Die mit L_1 markierte Linie liegt zwischen zwei anderen und kann daher nur sehr geringfügig verdrängt werden. Dies führt zur Beibehaltung der Verdrängungssituation und erfordert einen Ausgleich der Energien, wie im vorigen Abschnitt beschrieben.

Ein weiteres Problem entsteht durch Glättung der Linie L_0 (6.8). Überschreitet die Krümmungsvarianz der Linie den vorgegebenen Grenzwert, so wird sie geglättet. Bei der Formvereinfachung mit Snakes führt dies schon bei kleinen, gering glättenden Parametern $\alpha = \beta = 1$ dazu, daß sich die Linie L_0 mit der

6.3.2 ÜBERLAGERUNG VON LINIEN DURCH GLÄTTUNG

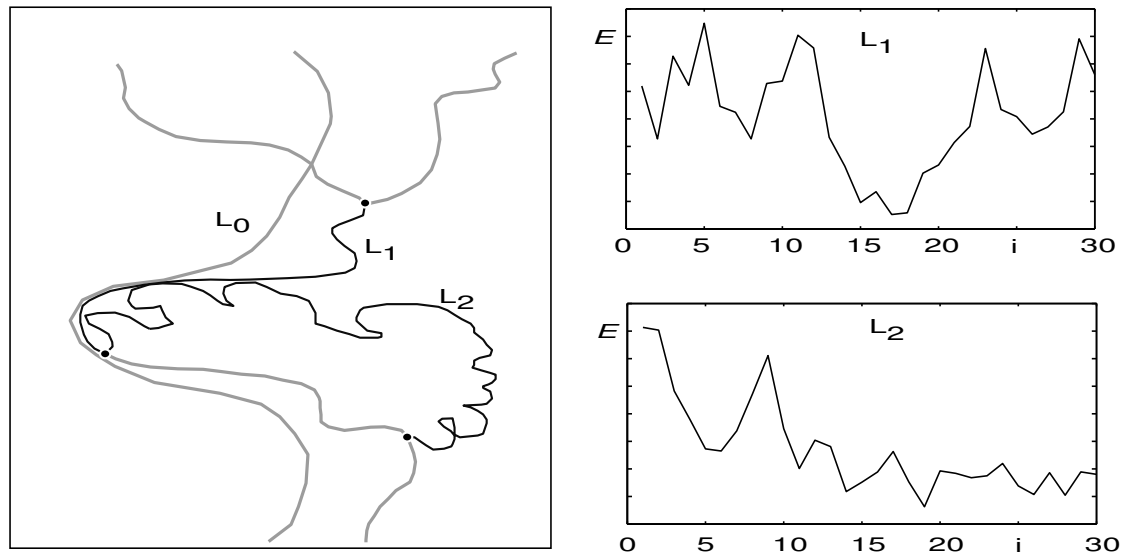


Abbildung 6.7: Energieverlauf für zwei ausgewählte Linien bei der Snakes-Verdrängung.

Rechts ist für die Linien L_1 und L_2 der Verlauf der Gesamtenergie E (vgl. Gleichung (6.37)) für 30 Iterationsschritte dargestellt.

Linie L_1 überschneidet. Nachfolgende oder gleichzeitig ausgeführte Verdrängung kann die Überlagerung nicht mehr korrigieren. Die Schnittstellen bleiben nach der Glättung in jedem Fall erhalten und nur die Punkte in der Umgebung des Schnittes werden voneinander auf Mindestabstand gebracht.

Um solche Situationen zu vermeiden, werden für die kombinierten Snakes-Verfahren die folgenden Lösungsmöglichkeiten vorgeschlagen.

Für die Tafus ist dieses Vorgehen entbehrlich, weil selbst bei starken Glättungen ($\alpha = \beta = 1$) in den Untersuchungen keine Konfliktsituationen auftraten. Dies ist wahrscheinlich auf die Restriktionen bei der Krümmung zurückzuführen, welche nur maximale Winkeländerung von $\pi/3$ bei der Glättung zulassen.

Gewichtung der Glättung beim wechselseitigen Verfahren

Die Ursachen der Überlagerungseffekte sind zum einen in einer "extremen" Glättung und zum anderen in der dichten Lage der Linien zueinander begründet. Eine Lösung besteht demnach darin, die Parameter der iterativen Glättung so zu wählen, daß eine geringere Formvereinfachung eintritt. Dies läßt sich durch den Einsatz variabler Koeffizientenmatrizen verwirklichen, deren Parameter durch die Krümmung gesteuert werden. Bei stark kurvigen Segmenten wird dann die Linienform besser erhalten, besonders wenn mit großen Parameterwerten geglättet wird. Die Wirkung der variablen Koeffizientenmatrix ist in der Abbildung 6.9 (b) zu sehen.

Die zweite Lösungsvariante geht davon aus, daß die Linien so dicht aneinander liegen, daß eine Verdrängungsenergie ermittelbar ist. Diese kann für eine nachträgliche Gewichtung \mathbf{g}^V der Koordinatendif-

6.3.2 ÜBERLAGERUNG VON LINIEN DURCH GLÄTTUNG

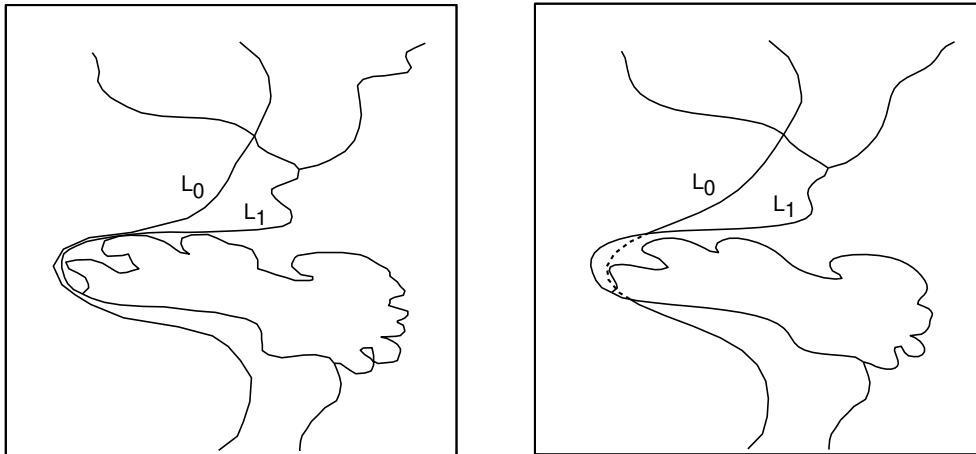


Abbildung 6.8: Überlagerung von Linien durch Glättung.

Die Linie L_0 wird im Glättungsalgorithmus so verschoben, daß sie sich mit der Linie L_1 schneidet. Die Situation ist durch Verdrängung nicht umkehrbar.

ferenzen (dx, dy) zwischen ursprünglicher und geglätteter Linie genutzt werden.

Für die Berechnung der Gewichtung wird die geglättete und normierte Verdrängungsenergie der Koordinatenrichtungen \mathbf{E}_x und \mathbf{E}_y benutzt:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_x^V &= (1 - \mathbf{A}_p^{-1} \mathbf{E}_x)^3 \leq 1, \\ \mathbf{g}_y^V &= (1 - \mathbf{A}_p^{-1} \mathbf{E}_y)^3 \leq 1. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Anschließend erfolgt die Multiplikation mit den Koordinatendifferenzen:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n^t &= \mathbf{x}^{t-1} + \mathbf{g}_x^V (\mathbf{x}^t - \mathbf{x}^{t-1}), \\ \mathbf{y}_n^t &= \mathbf{y}^{t-1} + \mathbf{g}_y^V (\mathbf{y}^t - \mathbf{y}^{t-1}). \end{aligned} \quad (6.39)$$

Durch die Verwendung der dritten Potenz der Gewichtungsfunktion wird sichergestellt, daß bei kleinen Verdrängungsbeträgen eine geringe Punktbeziehung durch Glättung erfolgt.

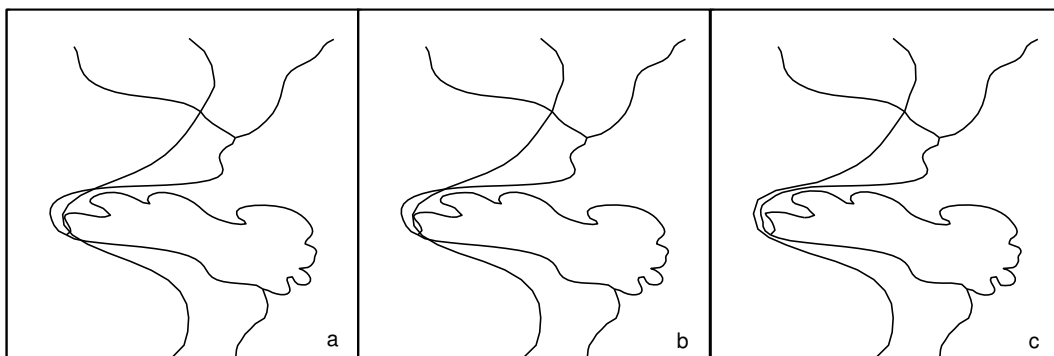


Abbildung 6.9: Gewichtung der Glättung durch die Verdrängung.

Im Bild (a) ist die ursprüngliche Überlagerungssituation nach der Glättung zu sehen. Durch den Einsatz variabler Koeffizientenmatrizen (b) und der Kombination dieser, mit einer durch die Verdrängungsenergie gewichteten Glättung, läßt sich die Konfliktsituation verhindern (Bild c).

6.3.2 ÜBERLAGERUNG VON LINIEN DURCH GLÄTTUNG

Variabler Parameter γ beim integrierten Verfahren

Im integrierten Snakes-Verfahren ist die nachträgliche Gewichtung der Glättung aufgrund der Struktur der Gleichungssysteme nicht möglich. Es ist allerdings überlegenswert, ob der Parameter γ , der eine Gewichtung zwischen Verdrängung und Glättung vornimmt, variiert werden kann.

Betrachtet man die Snakes-Gleichungen (6.30 f.), dann unterscheiden sich diese voneinander durch das zu filternde Signal. Bei der Linienglättung sind große Werte (S_g) zu filtern, während bei der Verdrängung kleine Differenzwerte (S_d) geglättet werden. Wird der Parameter γ durch die Krümmung gesteuert, ergibt sich ein Signal wie in der Grafik 6.10. Wird dieses geglättet und zu den mit γ gewichteten Koordinaten des vorherigen Iterationsschrittes addiert, dann resultiert dies in einer zerstörten Linie. Die Ursache dafür sind die geglätteten mittleren Koordinatenwerte (gmS), welche für die Summenbildung zu groß oder zu klein sind. Folglich ist die Variation des Parameters γ für das integrierte Snakes-Modell nicht verwendbar.

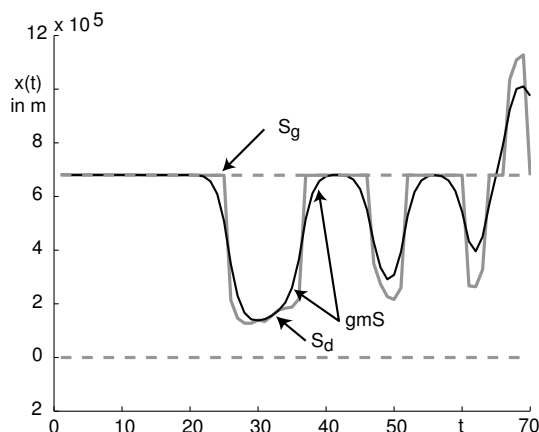


Abbildung 6.10: Zu glättendes Signal im integrierten Snakes-Modell.

S_g und S_d : Zu glättender Signalanteil aus der Linienglättung bzw. aus der Linienverdrängung.
 gmS : Geglättete mittlere Koordinatenwerte, die eine Zerstörung der Linie verursachen.

Obwohl für das Tafus-Modell prinzipiell keine Verbesserung notwendig ist, soll an dieser Stelle die Möglichkeit eines variablen Parameters γ vorgestellt werden.

Die Größenordnung der beiden berechneten Winkeländerung $d\phi_G$ und $d\phi_V$ aus den Gleichungen (6.34 f.) stimmen in ungefähr überein. Das Snakes-Problem einer "ungleichmäßigen" Funktion besteht demnach nicht bzw. hat nicht die gravierenden Auswirkungen, da nur kleine Winkeländerungen zugelassen werden.

Der variable Parameter γ ist aus der Verdrängungsenergie E_{ext} folgendermaßen zu berechnen:

$$\gamma = |\mathbf{A}_T^{-1} \mathbf{E}_{ext}|^{1/3}. \quad (6.40)$$

Die benötigte externe Energie E_{ext} ist mit der Formel (6.18) zu ermitteln.

Die vollkommene Verhinderung der Linienüberlagerung mit der genannten Gewichtung \mathbf{g}^V ist nicht erreichbar. In höheren Iterationsschritten trat der Überlagerungseffekt im Beispieldatensatz erneut auf.

6.3.3 UNTERSUCHUNGSERGEBNISSE DER KOMBINATIONSVORFAHREN

Weil die Linien weit genug auseinander liegen, kann keine Verdrängungsenergie berechnet werden. Die Glättung ist aber trotzdem so stark, daß eine Überlagerung stattfindet. Eine weiterer Grund ist die Fixierung der Linienenden und folglich auch der Kreuzungen.

Um das Problem zu lösen sind folgende weitere Ansätze denkbar:

- Die Wahl kleiner Snakes-Parameter für eine geringere Glättung.
- Veränderung der Algorithmen, um die Verschiebung von Kreuzungen zu ermöglichen.
- Die Durchführung von vorhergehenden Testglättungen, um die neue Verdrängungssituation zu untersuchen. Mit dem ermittelten Vorwissen erfolgt schließlich eine Gewichtung der Glättung im eigentlichen Iterationsschritt.

6.3.3 Untersuchungsergebnisse der Kombinationsverfahren

Mit den genannten Testdaten erfolgten Untersuchungen aller Kombinationsmöglichkeiten von Glättung und Verdrängung sowie Experimente zur Funktionsfähigkeit der einzelnen Generalisierungsprozesse. Im Anhang C werden ausgewählte Ergebnisse graphisch repräsentiert, welche die Schlußfolgerungen verdeutlichen sollen.

Ein Hauptproblem bei der Untersuchung besteht in der Definition eines Abbruchwertes für das Verdrängungsverfahren, wenn die Konfliktsituationen nicht beseitigt werden können. Der Fall tritt grundsätzlich in den komplexeren Datensätzen auf und wird zum Teil dadurch verursacht, daß sich für Kreuzungssituationen immer Verdrängungsenergien berechnen lassen. Es ist demnach empfehlenswert, weitere Einschränkungen bei der Energieberechnung vorzunehmen. Bewährt hat sich in jedem Fall, die Verdrängungsenergie für verdichtete, äquidistante Punkte der Vergleichsline zu berechnen.

Die iterative Lösungsstrategie ist unabdingbare Voraussetzung für beide Generalisierungsverfahren. Zum einen wird der Algorithmus der Forderung nach schrittweiser Minimierung der Energien bei der Verdrängung gerecht. Zum anderen ist bei einer Einschnitt-Lösung die Formerhaltung nicht gewährleistet. Mit einem iterativen Ansatz lassen sich beliebig starke Glättungen erzielen, ohne Defekte akzeptieren zu müssen, welche bei ungünstiger Parameterwahl entstehen. Als solche unerwünschten Effekte sind die Glättung markanter Formen und die Verschiebung der Linienendpunkte zu betrachten.

Die Erhaltung der Endpunkte ist eine der Filterbedingungen, die in den Algorithmen durch zusätzliche Restriktionen eine starke Beachtung findet. Um dabei Probleme zu vermeiden, sollte mit dem Snakes-Algorithmus auf eine Bearbeitung von Linien mit weniger als sieben (interpolierte) Stützpunkte verzichtet werden. In einem der Beispiele führte die Filterung einer "zu kurzen" Linie zur Entfernung von ihrer ursprünglichen Lage.

Eine allgemeingültige Empfehlung kann für die Festsetzung der Modellparameter erfolgen. Unter der Voraussetzung eines iterativen Lösungsansatzes hat sich die Wahl $\alpha = 1$ und $\beta = 1$ bewährt. Lediglich bei der Linienüberlagerung im Abschnitt 6.3.2 (vgl. Abbildung 6.8) hat dies Komplikationen verursacht, für die aber Lösungsmöglichkeiten angeboten werden.

6.3.3 UNTERSUCHUNGSERGEBNISSE DER KOMBINATIONSVORFAHREN

Betrachtet man die Resultate der kombinierten Verfahren, dann können im Wesentlichen die folgenden Aussagen abgeleitet werden:

1. Sind Linien zu verdrängen und zu glätten, so wird in den meisten Fällen die Verdrängungssituation bereits durch den Glättungsalgorithmus aufgelöst.
2. Die Berechnungszeiten der Verdrängung übersteigen die der Glättung wesentlich (Verhältnis 1:4 bis 1:10). Die Ursache hierfür liegt in der aufwendigen Ermittlung der Konfliktenergie. Für die kombinierten Verfahren ist die Prozessierungszeit der Verdrängung ausschlaggebend. Dabei bestehen zwischen den Kombinationsmöglichkeiten sowie zwischen Tafus- und Snakes-Modellen kaum Unterschiede im Zeitbedarf pro Iterationsschritt.
3. Die wechselseitigen Verfahren haben gegenüber dem integrierten Modell den Vorteil, daß bei der Glättung eine variable Koeffizientenmatrix verwendet und die Stärke der Glättung durch die Verdrängung gewichtet werden kann (vgl. Abschnitt 6.3.2). Zudem lassen sich durch die Trennung der Verfahren für beide Algorithmen konkrete Ausführungsbedingungen definieren.
4. Eine größere Anzahl an Iterationsschritten ($t > 5$) führt zu kaum unterscheidbaren Ergebnissen zwischen variablen und konstanten Koeffizientenmatrizen. Der Einsatz veränderlicher Parameter α und β erhält indes die Form der Linie in den ersten Iterationen besser und verhindert Verdrängungskonflikte.

Vergleicht man die Ergebnisse von Tafus- und Snakes-Modellen, so sind die Snakes-Verfahren aufgrund ihrer Robustheit vorzuziehen. Bei der Formvereinfachung und Verdrängung mit Tafus führen Linien mit ungleichmäßigen Punktabständen zu unerwünschten Effekten. Sind die Punktabstände äquidistant und dicht genug in den Kurven, so offenbaren die Tafus bei der Erhaltung von Knickstellen Vorteile, sofern bei der Glättung keine Punkte gelöscht werden.

Als sehr problematisch erweisen sich die Tafus-Kombinationen, wenn die Krümmungsvarianz als Abbruchbedingung des iterativen Verfahrens definiert wird. Das Glättungsverfahren arbeitet vielversprechend und offenbart sogar den genannten Vorteil. Jedoch verursacht die Anwendung der Verdrängung im wechselseitigen Verfahren eine erneute Aufräuhung der Linie und damit eine Erhöhung der Krümmungsvarianz. Im ungünstigen Fall entwickelt sich an ein und der selben Stelle eine endlose Wiederholung von Glättung und Verdrängung.

Im Beispiel der Abbildung 6.6 (a) löst der Snakes-Algorithmus die Verdrängungs- und Glättungsaufgabe nach acht Iterationen, während der Tafus-Algorithmus nach 30 Iterationen abgebrochen werden mußte. Selbst der integrierte Tafus-Ansatz, der in der Regel bessere Ergebnisse lieferte, konnte die Abbruchkriterien nach 30 Iterationsschritten nicht erfüllen. Dem ist hinzuzufügen, daß der Ansatz eines variablen Parameter γ im integrierten Tafus-Modell keine Vorteile gegenüber dem konstanten Wert $\gamma = 0.5$ erzielt.

6.3.3 UNTERSUCHUNGSERGEBNISSE DER KOMBINATIONSVORFAHREN

Die genannten Ergebnisse zur Kombination von Verdrängung und Formvereinfachung sind die Resultate erster Untersuchungen. Weitere Versuche sollten folgen und vor allem Lösungsansätze für die beiden folgenden Problempunkte ermittelt werden:

- (a) Reihenfolge einer wechselseitigen Durchführung von Glättung und Verdrängung und
- (b) Bestimmung eines Abbruchkriteriums für die Verdrängung komplexer Datensätze.

Schließlich ist die Integration in ein Geo-Informationssystem oder eine Generalisierungssoftware der nächste Schritt, um die Funktionalität der Ansätze mit den gegebenen Systembeschränkungen und -vorteilen zu prüfen. Die dabei mögliche Einbeziehung topologischer und semantischer Informationen gibt sicherlich neue Impulse bei der Beseitigung von Defekten.

Von Seiten des Autors wird das Snakes-Modell mit wechselseitiger Kombination favorisiert. Durch:

- die Modifizierbarkeit der einzelnen Algorithmen,
- die Verwendung variabler Koeffizientenmatrizen für die Glättung,
- den Ansatz einer verdrängungsgewichteten Glättung zur Fehlerbehandlung und
- die Robustheit gegenüber nicht äquidistanten Punktabständen

qualifiziert sich der Ansatz für die Implementation in eine kartographische Generalisierungssoftware. Spielen bei einer weiteren Bearbeitung die Originalpunkte einer Linie keine Rolle mehr, so bietet sich nach Erzeugung äquidistanter und kurzer Punktabstände auch der integrierte Tafus-Algorithmus an. Im Nachgang der Bearbeitung kann die Linie wieder ausgedünnt werden, um eine stark redundante Datenspeicherung zu vermeiden. Dies kann ebenfalls für die Glättung mit Snakes empfohlen werden.

7 Zusammenfassung und offene Probleme

Der Übergang von analogen auf digitale Medien in der Kartenherstellung ermöglicht eine Vielzahl von Verbesserungen kartographischer Produkte. Dies betrifft sowohl die Qualität der Druckerzeugnisse als auch Steigerungsmöglichkeiten im Informationsgehalt und der Genauigkeit von Karten. Neben der hierfür nötigen Entwicklung neuer Verfahren ist es wichtig, bereits bekannte analoge Prozesse auf digitale Ebene zu übertragen. Ein Beispiel dafür ist die Ableitung von Karten kleiner Maßstäbe aus Karten großer Maßstabsbereiche. Ein hingegen neu zu entwickelndes Verfahren ist die Ableitung topographischer Karten aus digitalen Landschaftsmodellen.

An beiden Verfahren hat die rechnergestützte Generalisierung einen entscheidenden Anteil. Die Entwicklung digitaler Generalisierungswerkzeuge, welche die Aufgaben der bereits bekannten analogen Einzelprozesse erfüllen, ist das Ziel gegenwärtiger Forschungsprojekte wie z.B. AGENT¹ und dem Nachfolgevorhaben MAGNET². In dieser Arbeit wird die Eignung und Kombination bestimmter Verfahren der Signalverarbeitung für zwei spezielle Generalisierungsprozesse näher untersucht. Dies ist zum einen die Formvereinfachung und zum anderen die Verdrängung. Bei den Untersuchungen wird sich auf Verfahren für die Bearbeitung von Linienobjekten der Karte beschränkt, wie beispielsweise Straßen oder Flußläufe.

In der Bildverarbeitung hat sich die Beschreibung von Linienobjekten mittels Splines durchgesetzt. Speziell geeignet für die Prozesse der Generalisierung sind dabei energieminimierende Splines (Snakes). Mit ihnen lassen sich nicht nur Linien abbilden, sondern es können auch beliebig definierbare äußere Bedingungen in die Formbildung einfließen. Dies qualifiziert die Snakes und die Tafus - eine spezielle Parametrisierung der Splines mit der Tangentenwinkelfunktion - sowohl für die Verwendung bei der Formvereinfachung als auch für die Verdrängung.

Das dritte untersuchte Verfahren, welches nur für die Glättung von Linien benutzt wird, ist die Filterung mittels Wavelet-Transformation. Bei dieser können keine äußeren Einflüsse berücksichtigt werden. Allerdings kann eine Linie neben den rechtwinkligen Koordinaten auch durch die Tangentenwinkelfunktion (TWF) beschrieben werden. Wird diese mit einem Wavelet erster Ordnung transformiert und gefiltert, dann erfolgt eine krümmungsabhängige Glättung der Linie. Durch diese Eigenschaft lassen sich charakteristische Formen der Linie besser erhalten.

Das erste untersuchte Verfahren stellt die Linienglättung mittels stationärer Wavelet-Transformation dar. Dazu wird die Parameterdarstellung der Linie in die Tangentenwinkeldarstellung überführt und diese mit dem Haar-Wavelet in den Wavelet-Bereich (WB) transformiert. Die transformierte TWF wird im WB in verschiedene Frequenzbänder (Skalen) abgebildet. Durch Sperrung einzelner Bänder, beginnend mit den

¹AGENT: Automated GEneralisation New Technology

²MAGNET: Mapping Agencies Generalisation NETwork

höchsten Frequenzen, wird die Filterung realisiert und nach der Rücktransformation eine geglättete TWF erhalten. Den Abschluß bildet die Rückgewinnung der rechtwinkligen Koordinaten der formvereinfachten Linie.

Das Verfahren weist zwei Hauptprobleme auf:

- (a) Durch die Sperrung einzelner Skalen fehlen deren Wavelet-Koeffizienten für eine richtige Rekonstruktion der Signalrandwerte. Dies hat zur Folge, daß die Anfangs- und Endwerte der TWF zu korrigieren sind.
- (b) Die aus einer stark geglätteten TWF zurückerhaltene Linie stimmt in ihrer Lage und Form nur wenig mit der ursprünglichen Linie überein.

Die Korrektur der TWF-Randwerte konnte zufriedenstellend gelöst werden, indem die Nutzung von Filterergebnissen aus anderen Skalensperren erfolgte. Hingegen ließ sich das Problem der veränderten Lage und Form nur ungenügend beseitigen. Mit Hilfe der Drehstreckung konnten zwar Anfangs- und Endpunkte wieder in Übereinstimmung mit ihrer Lage vor der Filterung gebracht werden; die Deformationen innerhalb der Linie ließen sich damit jedoch nicht beseitigen. Eine hierfür noch zu untersuchende Lösung ist die vorangehende Segmentierung der Linie in Abschnitte mit wenigen Punkten. Alternativ zur Glättung der TWF sollten auch Tests zur Filterung der Koordinatenfunktionen durchgeführt werden. Das Ergebnis ist in diesem Fall aber nicht mehr von der Krümmung abhängig.

Neben den Untersuchungen zur Formvereinfachung der Linie mit Wavelets werden ebenfalls die Durchlaßcharakteristik der Wavelet-Filterung und Kenngrößen der TWF-Glättung wie Skalenenergie, Varianz der Krümmung und Linienlänge bestimmt.

Die Formvereinfachung mit den energieminimierenden Splines entspricht im Prinzip der iterativen Anwendung eines gewichteten Mittelwertfilters. Bei der Filterung mit Snakes wird mit den Steuerparametern α und β ein gewichtetes Fünfpunktmittel gebildet und anschließend mit der invertierten Fünfpunkt-Filtermatrix geglättet. Das zu filternde Signal sind die rechtwinkligen Koordinatenfunktionen x und y . Die Formvereinfachung mit Snakes erfolgt im Grundansatz ohne Einbeziehung äußerer Bedingungen und realisiert somit ein stationäres Filterverfahren.

Die Tafus-Filterung unterscheidet sich von den Snakes insofern, daß eine gewichtete Dreipunkt-Filtermatrix invertiert wird und das zu glättende Signal die Krümmungsfunktion der Kurve darstellt. Der Ansatz zur Filterung der Krümmung realisiert eine instationäre Glättung der Koordinatenfunktionen. Das gefilterte Signal wird als Winkeländerung der TWF betrachtet und schließlich durch Vorwärtseinschneiden in die Koordinatenverschiebungen (dx, dy) umgesetzt. Die Punktverschiebungen werden dabei nur senkrecht zur Tangentenrichtung der Linie zugelassen. Versuche, die TWF selbst zu glätten, scheiterten an der Größe der resultierenden Differenzbeträge zwischen ursprünglicher und geglätteter TWF. Diese sind häufig so extrem, daß die Umsetzung in Koordinatenverschiebungen die Zerstörung der Liniengeometrie verursacht.

Um die Glättung mit Snakes und Tafus für die Generalisierung von Linien nutzen zu können, werden in die Algorithmen zusätzliche Bedingungen eingeführt. Spezielle Ziele dieser Restriktionen sind die Verwirklichung einer maßstabstreuen Filterung und die Beibehaltung der Anfangs- und Endpunkte der Linien.

Ein weiteres Ziel der Generalisierung neben der Formvereinfachung ist die Erhaltung charakteristischer Formen, die als Erkennungsmerkmal dienen. Aus diesem Grund wurden die benutzten Spline-Algorithmen modifiziert, um Charakteristika wie die Mäander eines Flusses zu bewahren. Ein Ansatz hierfür erfolgte durch Variation der Parameter α und β , welche die Gewichtung der Punktmittel festlegen. Sowohl bei den Snakes als auch bei den Tafus hat sich bewährt, den Parameter α als Konstante festzusetzen und β mit der Krümmung zu steuern. Die Ergebnisse der modifizierten Filterung sind zufriedenstellend, aber nicht gut. In den ersten Iterationsschritten ist - gerade bei großen Snakes-Parametern - eine bessere Formerhaltung zu erkennen; jedoch unterscheiden sich die Glättungsergebnisse von konstanten und variablen Parametern nach mehreren Iterationsschritten nur geringfügig. Zur Erhaltung von Knickpunkten hat es sich als nützlich erwiesen, die Linien an den Knickstellen zu segmentieren und die entstandenen Elemente getrennt zu glätten.

Bezüglich der Aufgabenstellung sollte mit Hilfe der Kenngrößen der Wavelet-Filterung eine Abschätzung der Steuerparameter von Snakes und Tafus vorgenommen werden. Dafür wurde der Vergleich der Filtercharakteristiken als bestes Vorgehen empfohlen. Diese Teilaufgabe erwies sich allerdings als nicht durchführbar, da die Wavelet-Filterung eine Tiefpaßfilterung realisiert, für die Glättung mit Snakes analytisch keine Durchlaßcharakteristik ermittelbar war und für die Tafus eine Bandpaßcharakteristik berechnet wurde.

Möglichkeiten zur Steuerung der Linienglättung mit Snakes und Tafus sind nur für ein iteratives Glättungsverfahren gegeben. Um einen Vergleich zwischen beiden Verfahren und der Wavelet-Filterung durchzuführen, wurden die ermittelten Kenngrößen der Wavelet-Glättung als Abbruchparameter untersucht. Für die Skalenenergie konnte keine äquivalente Steuergröße ermittelt werden. Die Linienlänge wurde aufgrund ihrer Korrelation mit der Krümmungsvarianz nicht weiter betrachtet. Es verbleibt somit die Krümmungsvarianz als einzige Kenngröße zum Vergleich der Glättungsalgorithmen. Allerdings läßt sich diese für die Wavelet-Filterung in mehreren Varianten berechnen, welche unterschiedliche Ergebnisse hervorbringen. Aus diesem Grund und den Problemen in der Rekonstruktion der geglätteten Linie bei der Glättung mit Wavelets ist ein Vergleich mit den benutzten Spline-Verfahren nicht sinnvoll.

Die ebenfalls mit den energieminimierenden Spline-Verfahren durchgeführte Verdrängung wurde mit dem Snakes-Ansatz von [Burghardt, 2001] und dem Tafus-Ansatz von [Borkowski et al., 1999] realisiert. Die Punktverschiebungen ergeben sich aus der iterativen Minimierung bzw. Glättung einer Energiefunktion, die aus zwei Termen besteht. Der Term der inneren Energie stellt die Formerhaltung der Linie sicher, während die externe Energie die Größe der Verdrängung beschreibt. Die Berechnung der Verdrängungsenergie erfolgt aus der normierten Differenz zwischen dem geometrischen Soll- und dem Ist-Abstand von zwei Objekten.

Die Kombination der Algorithmen zur Glättung und Verdrängung ist in zwei Varianten möglich. Zum einen können die Verfahren wechselseitig durchgeführt werden und zum anderen ist die Integration in einem Gleichungssystem realisierbar. Bei der Implementation der kombinierten Verfahren erfolgte eine strikte Trennung von Snakes- und Tafus-Modellen.

Nach den Untersuchungen ließ sich feststellen, daß bei der Kombination der Verfahren die meisten Ver-

drängungssituationen bereits durch die Glättung gelöst wurden. Desweiteren traten folgende Probleme auf:

- (a) Bei starker Glättung können neue Verdrängungssituationen durch Überlagerung vorher separater Linien oder Liniensegmente hervorgerufen werden.
- (b) Bei der Verwendung des wechselseitigen Verfahrens ist zu entscheiden, ob nach jedem Glättungsschritt die Verdrängungssituationen beseitigt werden oder durch Beschränkung der Verdrängungsschritte nur eine näherungsweise Auflösung erfolgen soll.
- (c) Mit jedem Glättungsschritt erhält die Linie eine andere Form. Somit kann die Initialisierung des formerhaltenden Energieterms der Verdrängung nicht mit der ursprünglichen Linie vollzogen werden.

Das erste Problem kann durch ein Feedback zwischen Verdrängung und Glättung gelöst werden. Dies wurde durch Einführung einer Restriktion realisiert, welche in Verdrängungssituationen nur geringe Glättungen erlaubt. Die Problemstellung (c) wurde vorläufig umgangen, indem die formerhaltende Energie nach jedem Glättungsschritt neu initialisiert wurde.

Im Testsystem bestand desweiteren das Problem, daß die Verdrängungsenergie komplexer Datensätze nicht verschwindet, da Kreuzungsbereiche von Linien immer solche Energien hervorrufen. Eine Einbeziehung topologischer Informationen kann dabei zu einer Lösung führen. Zusammen mit den Fragestellungen (b) und (c) sind dazu noch weitere Untersuchungen erforderlich. Die Implementation der Algorithmen in eine kartographische Generalisierungssoftware sollte der nächste Schritt zur Verifikation der Untersuchungsergebnisse sein.

Ein Vergleich der Ergebnisse von Snakes- und Tafus-Algorithmen offenbart eine deutliche Schwäche letzterer bei der Anwendung auf reale Datensätze ohne vorherige Aufbereitung. Diese sollte durch Punktverdichtung und die Herstellung einer Äquidistanz der Punktabstände erfolgen. Nach Durchführung der Generalisierungsverfahren ist eine Ausdünnung der Linienpunkte erforderlich, um Redundanzen im Datenbestand zu vermeiden. Dies gilt ebenfalls für die Glättung mit Snakes. Signifikante Unterschiede in den Berechnungszeiten der Spline-Modelle konnten nicht festgestellt werden.

Literaturverzeichnis

- [Bader, 2001] Bader, M. (2001). *Energy Minimization Methods for Feature Displacement in Map Generalisation*. Ph.D. thesis, Departement of Geography, University of Zurich.
- [Bethge, 1994] Bethge, F. (1994). *Genauigkeit geometrischer Größen aus Vektordaten*. Dissertation. Deutsche Geod. Komm., Reihe C, Nr. 473. München.
- [Bethge et al., 1997] Bethge, F., Meier, S. und Seegräf, C. (1997). *Glättungsfilter im Wavelet- und Fourierbereich*. Allgemeine Vermessungsnachrichten AVN - Heft 10/97.
- [Beyer, 2002] Beyer, G. (2002). *Terrain inclination and curvature from wavelet coefficients. approximation formulae for the relief*. Journal of Geodesy.
- [Beyer und Meier, 2001] Beyer, G. und Meier, S. (2001). *Geländeneigung und -wölbung aus Waveletkoeffizienten. Approximationsformeln für Profile*. Zeitschrift für Vermessungswesen, S.23-33.
- [Blatter, 1998] Blatter, C. (1998). *Wavelets - eine Einführung*. Vieweg Verlag, 1 Edition.
- [Bäni, 2002] Bäni, W. (2002). *Wavelets: eine Einführung für Ingenieure*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH, 1 Edition.
- [Bollmann und Koch, 2002] Bollmann, J. und Koch, W. (2002). *Lexikon der Kartographie und Geomatik*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 1 Edition.
- [Borkowski, 2002] Borkowski, A. (2002). *Persönliche Gespräche*. Departement of Geodesy and Photogrammetry, Agricultural University of Wroclaw.
- [Borkowski et al., 1999] Borkowski, A., Burghardt, D. und Meier, S. (1999). *A fast snakes algorithm using the tangent angle function*. IAPRS, Vol. 32, Part 3-2W5, 61-65.
- [Borkowski und Keller, 2002] Borkowski, A. und Keller, W. (2002). *Von stationären und instationären Filtern*. Festschrift zum 65. Geburtstag von Prof. Dr. Ing. habil. Siegfried Meier. TU Dresden.
- [Borkowski und Meier, 1999] Borkowski, A. und Meier, S. (1999). *Versuche zur robusten Snakes-Approximation von Höhenprofilen mit Diskontinuitäten*. Zeitschrift für Photogrammetrie - Fernerkundung - Geoinformation 6/1999, S.381-390.
- [Borkowski und Meier, 2001] Borkowski, A. und Meier, S. (2001). *Robustification of Tangent Angle Function Snakes*. Zeitschrift für Photogrammetrie - Fernerkundung - Geoinformation 2/2001, S.129-135.

LITERATUR UND QUELLENVERZEICHNIS

- [Bronstein und Semendjajew, 1981] Bronstein, I. N. und Semendjajew, K. A. (1981). *Taschenbuch der Mathematik*. B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig.
- [Burghardt, 2001] Burghardt, D. (2001). *Automatisierung der kartographischen Verdrängung mittels Energieminimierung*. Dissertation. Deutsche Geod. Komm., Reihe C, Nr. 536. München.
- [Burghardt, 2002a] Burghardt, D. (2002a). *Bemerkung zur Linienglättung mittels energieminimierender Splines*. unveröffentlichte Arbeitsdokumentation.
- [Burghardt, 2002b] Burghardt, D. (2002b). *Glättung mit Snakes*. Festschrift zum 65. Geburtstag von Prof. Dr. Ing. habil. Siegfried Meier. TU Dresden.
- [Burghardt, 2002c] Burghardt, D. (2002c). *Persönliche Gespräche*. Departement of Geography, University of Zurich.
- [Gertensen und Vogel, 1999] Gertensen, C. und Vogel, H. (1999). *Gertensen Physik*. Springer Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 20 Edition.
- [Gottschalk, 1971] Gottschalk, H.-J. (1971). *Versuche zur Definition des Informationsgehaltes gekrümmter kartographischer Linienelemente und zur Generalisierung*. Deutsche Geod. Komm., Reihe B, Nr. 189. Frankfurt a. M.
- [Kass et al., 1987] Kass, M., Witkin, A. und Terzopoulos, D. (1987). *Snakes: Active contour Models*. Proceedings of the First International Conference on Computer Vision, IEEE Comp. Soc. Press: 259-268.
- [Louis et al., 1998] Louis, A., Maaß, P. und Rieder, A. (1998). *Wavelets*. B. G. Teubner, 2 Edition.
- [Mallat, 1989] Mallat, S. (1989). *A theory for Multiresolution signal decomposition: The Wavelet representation*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence.
- [Meier, 1971] Meier, S. (1971). *Analog-Digital- und Digital-Analog-Wandlung linienförmiger Kartenzeichen nach dem Abtasttheorem der Nachrichtenübertragung*. Vermessungstechnik, Heft 10, VEB Verlag für Bauwesen.
- [Meier, 2000] Meier, S. (2000). *Die Snakes-Approximation als Hilfsmittel der Geodatenverarbeitung*. Allgemeine Vermessungsnachrichten 2-2000, S.50-57.
- [Meier, 2002] Meier, S. (2002). *Persönliche Gespräche*. Institut für Planetare Geodäsie, TU Dresden.
- [Meier und Keller, 1990] Meier, S. und Keller, W. (1990). *Geostatistik. Einführung in die Theorie der Zufallsprozesse*. Akademie-Verlag, Berlin 1990, 1 Edition.
- [Meyer, 1992] Meyer, Y. (1992). *Wavelets and Operators*. Cambridge University Press, 1 Edition.
- [Misiti et al., 2000] Misiti, M., Oppenheim, G. und Poggi, J.-M. (2000). *MATLAB - Wavelet Toolbox - User Guide*. MathWorks Inc., 2 Edition.
- [Schwarzbach, 1995] Schwarzbach, F. (1995). *Untersuchungen zur rechnergestützten Linienglättung*. Dissertation. Kartographische Bausteine - Band 10. IFK, TU Dresden.

LITERATUR UND QUELLENVERZEICHNIS

- [Weichsel, 2000] Weichsel, M. (2000). *Reliefglättung mit Erhaltung von Bruchkanten*. Diplomarbeit. Institut für Planetare Geodäsie. TU Dresden.
- [Williams und Shaw, 1990] Williams, D. und Shaw, M. (1990). *A fast algorithm for active contours and curvature estimation*. Proceedings of the 3rd International Conference on Computer Vision, IEEE Comput. Soc. Press, 592-595.

A Durchlaßcharakteristik der Wavelet-Transformation

Die Durchlaßcharakteristik der Skalensperre mit dem Haar-Wavelet wurde analytisch von [Meier, 2002] auf folgende Weise hergeleitet.

Die Fourier-Transformierte des Haar-Wavelets:

$$|\hat{\Psi}(\omega)|^2 = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{16}{\omega^2} \sin^4\left(\frac{\omega}{4}\right), \quad (\text{A.1})$$

wird umgestellt zu:

$$\frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{\omega} = \frac{8}{\pi} \cdot \frac{\sin^4\left(\frac{\omega}{4}\right)}{\omega^3}. \quad (\text{A.2})$$

Der Ansatz für die Durchlaßcharakteristik der Wavelet-Transformation ist:

$$\begin{aligned} G_F(\omega) &= 1 - \frac{4\pi}{c_\Psi} \int_0^{a_{Min}\omega} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega \\ &= 1 - \frac{1}{\ln(2)} \int_0^{a_{Min}x} \frac{\sin^4 x}{x^3} dx \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

mit:

$$c_\Psi = 2 \cdot \ln(2) \quad \text{und der Substitution:} \quad \frac{\omega}{4} := x. \quad (\text{A.4})$$

Die Lösung des unbestimmten Intergrals mit einer Integraltafel ergibt:

$$G_F(\omega) = \frac{1}{\ln(2)} \left(\frac{\sin^3 x (\sin x - 4 \cos x)}{2x^2} + ci(4x) - ci(2x) \right) \quad (\text{A.5})$$

mit $x := a_{Min} \frac{\omega}{4}$ und dem *Integralkosinus* ci für den gilt:

$$x \ll 1 : ci(x) \approx \ln(\gamma x) \quad x \rightarrow 0 : ci(2x) - ci(4x) \approx -\ln(2) \quad (\text{A.6})$$

B Beispiele zum Vergleich der Glättungsverfahren

ANHANG B - BEISPIELE ZUM VERGLEICH DER GLÄTTUNGSVERFAHREN

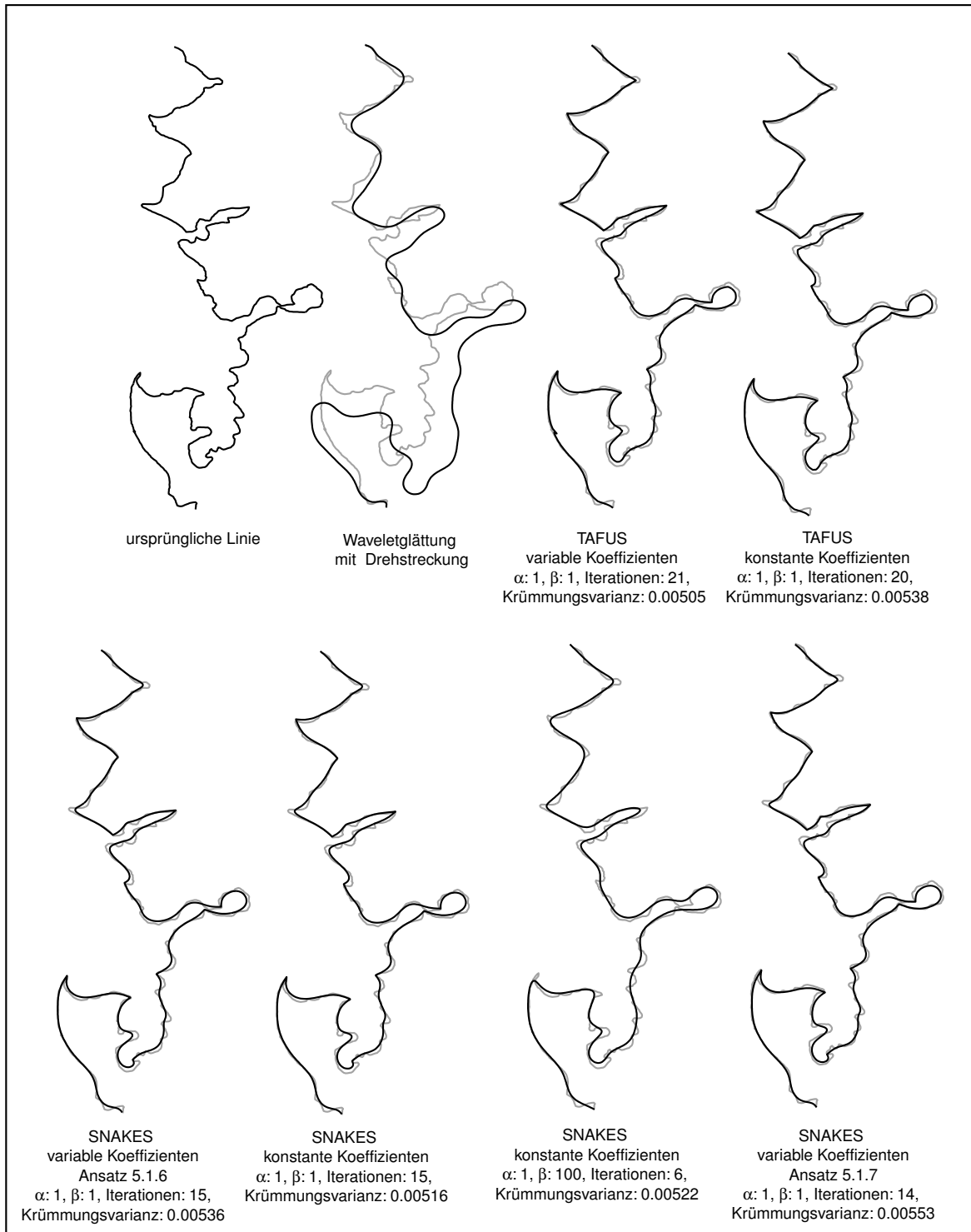


Abbildung B.1: Vergleich der Glättungsverfahren am Beispiel "Louisiana's Gulf Coast". Bei der Glättung wurde eine automatische Segmentierung der Linie an Knickstellen durchgeführt.

ANHANG B - BEISPIELE ZUM VERGLEICH DER GLÄTTUNGSVERFAHREN

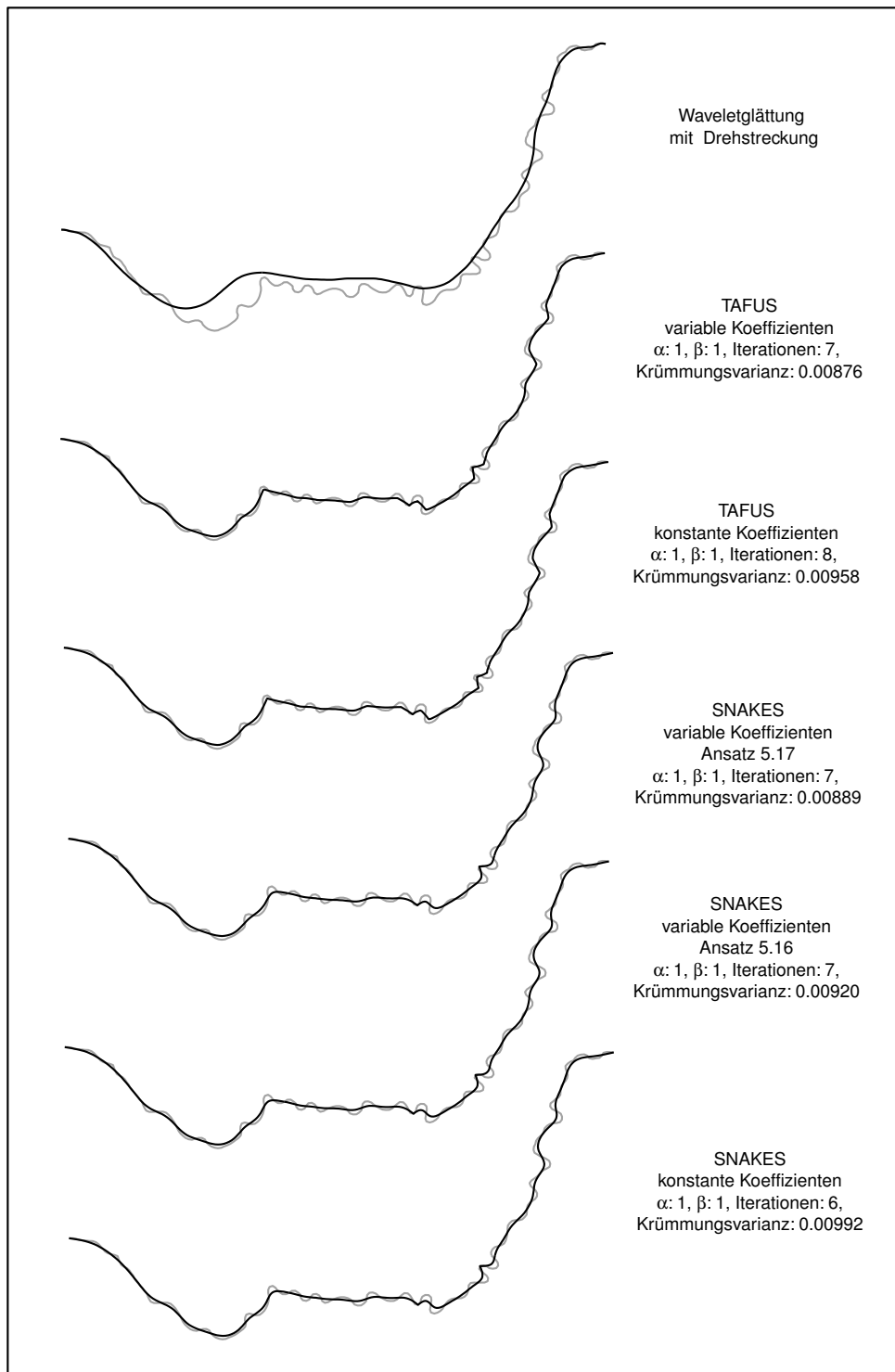


Abbildung B.2: Vergleich der Glättungsverfahren am Beispiel "Untere Nette". Bei der Glättung wurde eine automatische Segmentierung der Linie an Knickstellen durchgeführt.

C Beispiele zum Vergleich der Kombinationsverfahren

ANHANG C - BEISPIELE ZUM VERGLEICH DER KOMBINATIONSVERFAHREN

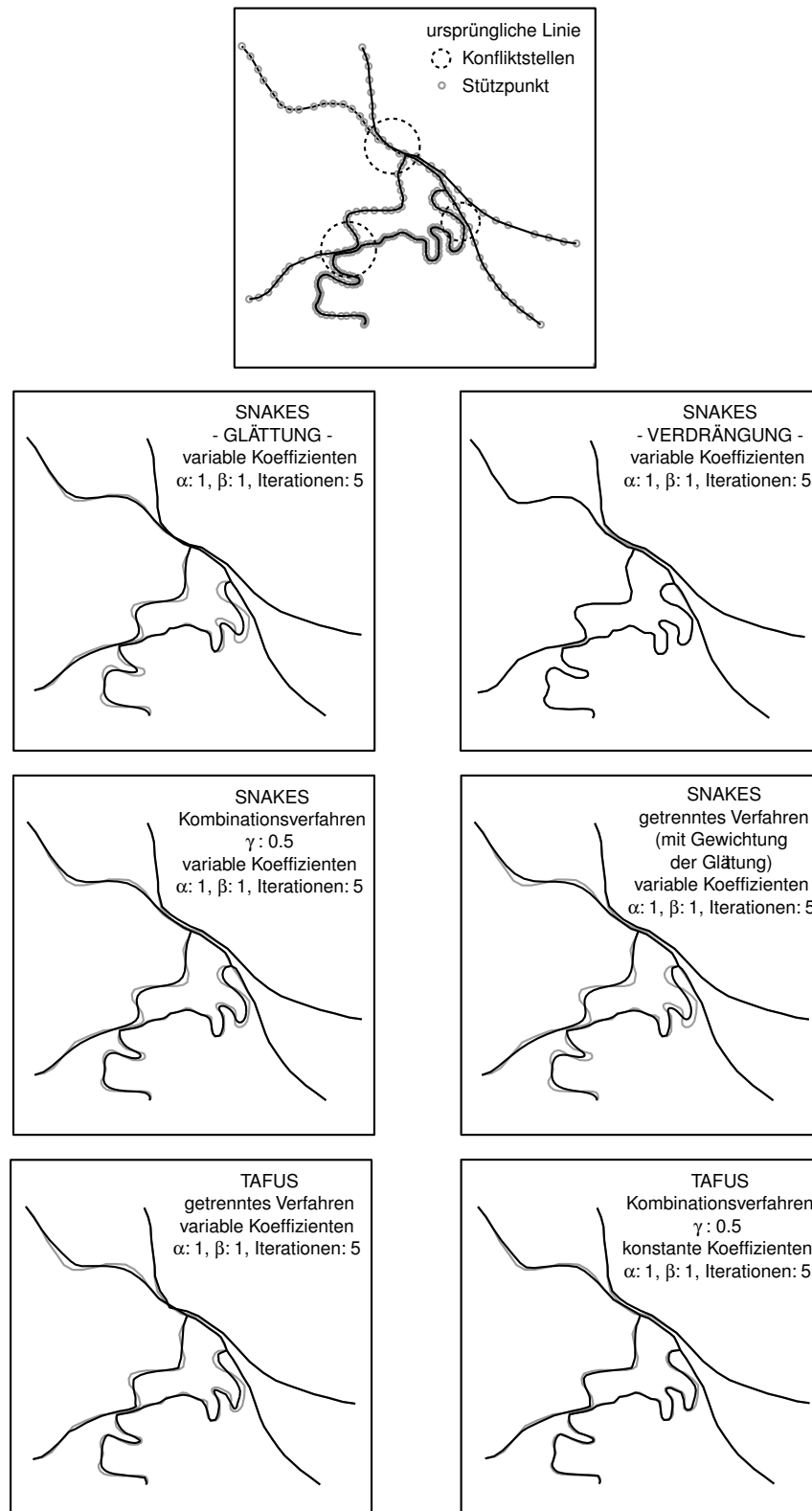


Abbildung C.1: Beispiel 1 zur Kombination von Verdrängung und Glättung. Die Tafus-Algorithmen funktionieren auf Grund der hohen Punktdichte gut. Zwischen zwei Glättungsschritten wird ein Verdrängungsschritt durchgeführt.

Hinweis: Der Glättungsgrad für Tafus und Snakes ist nicht vergleichbar, da die Anzahl an Iterationen als Abbruchparameter festgelegt wurde.

ANHANG C - BEISPIELE ZUM VERGLEICH DER KOMBINATIONSVERFAHREN

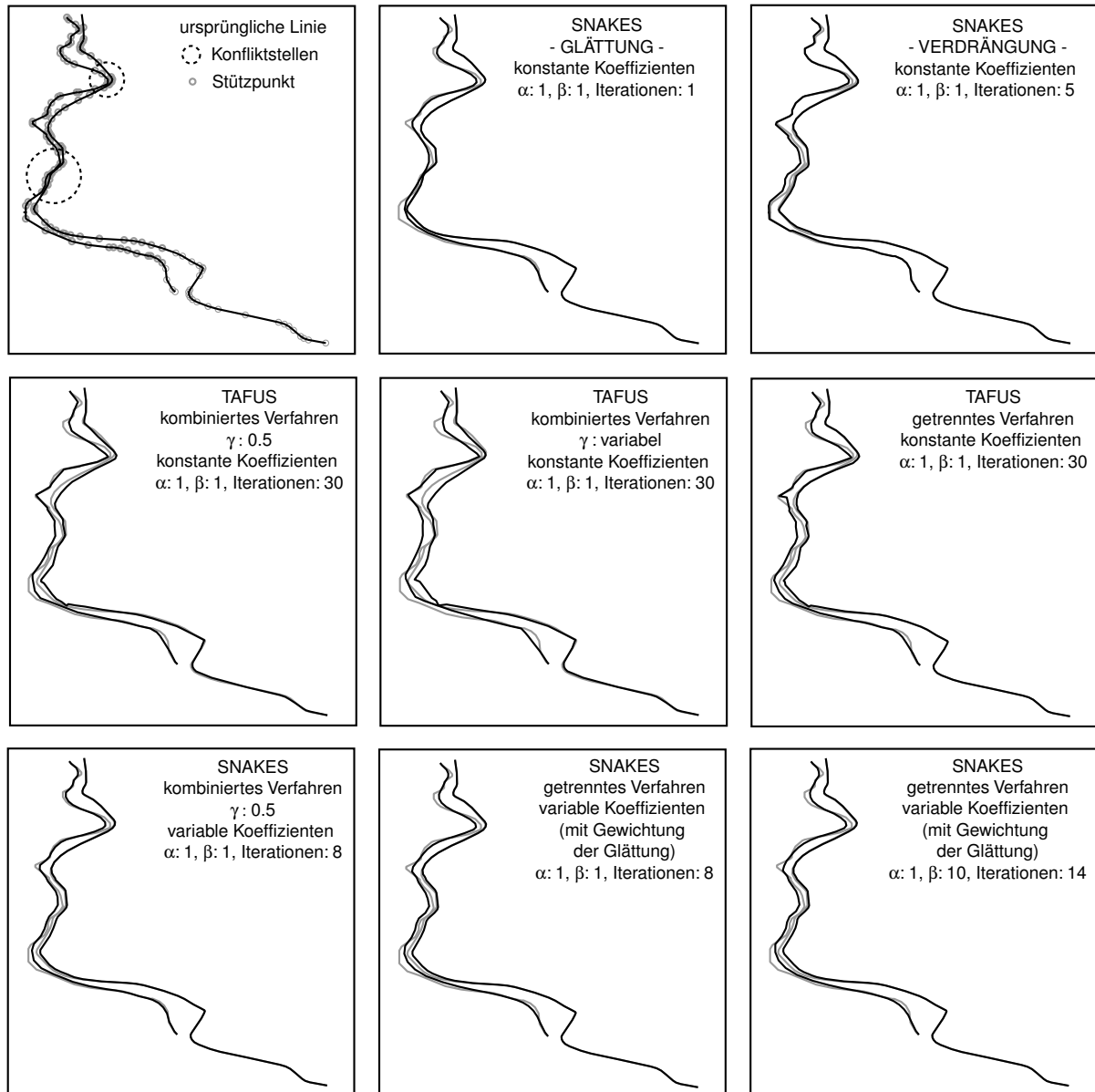


Abbildung C.2: Beispiel 2 zur Kombination von Verdrängung und Glättung. Die Tafus-Algorithmen erzielen auf Grund der natürlichen Punktdichte schlechte Ergebnisse und wurden nach 30 Iterationen abgebrochen. Zwischen zwei Glättungsschritten wird ein Verdrängungsschritt durchgeführt.

Dank

Mein besonderer Dank gilt Prof. Dr. S. Meier, welcher es mir ermöglichte, trotz seiner Pensionierung die Arbeit durchzuführen, mir als hervorragender Diskussionspartner in wissenschaftlichen Gesprächen zur Verfügung stand sowie die beiden Forschungsaufenthalte in Zürich und Wrocław arrangierte. In diesem Zusammenhang möchte ich mich genauso bei Dr. D. Burghardt von der Universität Zürich und Dr. A. Borkowski von der Akademia Rolnicza we Wrocławiu für ihre wertvollen Hinweise zu meiner Arbeit bedanken. Weiterhin sei auch Dr. G. Beyer erwähnt, durch welchen ich angeregt wurde, mich mit der Wavelet-Filterung von Geodaten zu beschäftigen.

Ebenfalls danken möchte ich meiner Familie für die Unterstützung beim Studium sowie Katja & Katja für die Geduld und die Verbesserungsvorschläge bei der Durchsicht der Arbeit.

Anschrift des Authors

Adresse: Stefan Steiniger
Elisabeth-Reichelt-Weg 43
09116 Chemnitz

Deutschland

email: perriger@gmx.de